A.V. Résolution des mécanismes

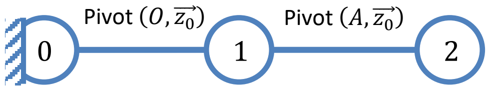
A.V.1 Contexte

On distingue les mécanismes en chaîne ouverte et en chaîne fermée. La résolution des mécanismes s'applique aux chaînes fermées.

A.V.1.a Chaîne ouverte

Lorsqu'un mécanisme est en chaîne ouverte, les pièces se succèdent et chaque degré de liberté des liaisons qui le composent doit être motorisée, pilotée, afin d'assurer les mouvements de la chaîne.

Son graphe des liaisons est de la forme :

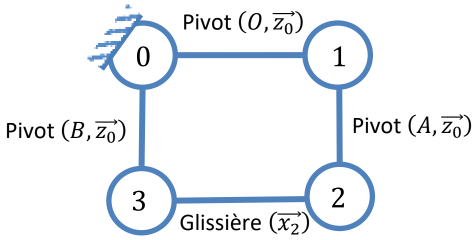


Nous avons précédemment introduit tous les outils nécessaires à l'étude des chaînes ouvertes et ce n'est donc pas l'objet de ce paragraphe.

A.V.1.b Chaîne fermée

Lorsqu'un mécanisme est en chaîne fermée, il existe des relations entre les différents mouvements. Bien qu'il y ait n degrés de liberté, il existe une relation entre eux et le seul pilotage d'un seul d'entre eux peut permettre de piloter le déplacement de l'ensemble des pièces du système.

Son graphe des liaisons est de la forme :



Dans les mécanismes complexes, il peut y avoir plusieurs chaînes.

On peut simplement déterminer leur nombre appelé **nombre cyclomatique** et noté γ :

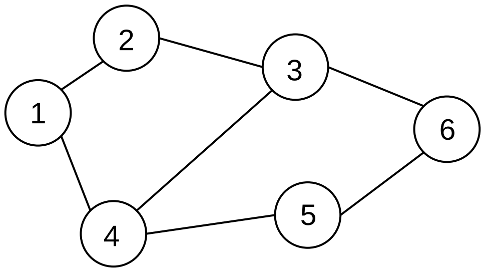
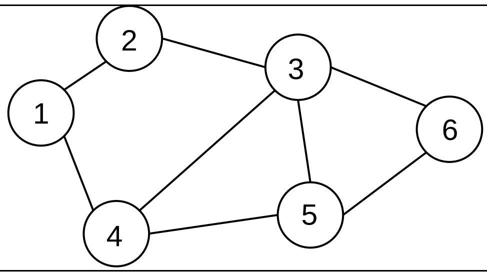
$$\gamma = L - p + 1$$

L : nombre de liaisons

p : nombre de solides dont le bâti

Le nombre cyclomatique correspond au **nombre de chaînes indépendantes** d'un système, c'est à dire le nombre de chaînes nécessaires et suffisantes qu'il faut étudier pour l'étude cinématique complète d'un mécanisme.

Exemples :

1		$L = 7$ $P = 6$ $\gamma = 7 - 6 + 1 = 2$ Etude de 12341 & 34563 Ou 12341 & 1236541 Ou 34563 & 1236541
2		$L = 8$ $P = 6$ $\gamma = 8 - 6 + 1 = 3$ Etude de 12341 & 3453 & 3653 Ou 6 autres possibilités !

Généralement, on étudie les γ chaines les plus simples.

A.V.1.c Etude des mécanismes

C'est dans le cas des chaînes fermées qu'il va falloir déterminer les relations qui existent entre les différents paramètres géométriques et cinématiques. Il existe différentes méthodes pour cela :

- Fermeture (de chaine) géométrique
- Fermeture (de chaine) cinématique
- Cinématique graphique

En général, l'objectif est d'obtenir une relation entre entrée et sortie d'un mécanisme.

Il faudra mener autant d'études (fermeture géométriques et cinématique) qu'il y a de chaînes fermées.

A.V.2 Particularités des méthodes

A.V.2.a Fermeture géométrique

La fermeture géométrique a pour but d'obtenir les relations entre les différents paramètres géométriques des mécanismes (longueurs et angles variables associés aux liaisons). Elle permet en particulier de déterminer les relations entre entrée e et sortie s. Les inconnues de cette résolution sont les paramètres géométriques des liaisons (angles, longueurs).

En appliquant la fermeture géométrique, on obtient une relation entrée/sortie qui peut être

- Explicite : $s = f(e)$ ou $e = f(s)$ (cf Bielle/Manivelle)
  $\Rightarrow$ Obtention soit de la formule directement, soit de la courbe $s = f(e)$ directement par symétrie de $e = f(s)$

- Implicite : $f(e,s) = 0$ – exemple : $\cos e \sin s + \sqrt{e \cos s + L} = 0$
  ⇒ Résolution numérique (ou mathématique compliquée)

La fermeture géométrique permet d'obtenir la relation cinématique (vitesse et vitesse de rotation) par dérivation temporelle des relations obtenues.

Bien que la solution cinématique puisse être obtenue par fermeture géométrique puis dérivation, lorsque seule la relation cinématique est demandée, il est bien plus rapide de faire une fermeture cinématique.

A.V.2.b Fermeture cinématique

La fermeture cinématique a pour but d'obtenir les relations entre les différents paramètres cinématiques des mécanismes (vitesses et vitesses de rotation associées aux liaisons). Elle permet en particulier d'obtenir une relation **toujours explicite** entre l'entrée et la sortie.

Les inconnues de cette résolution sont les paramètres cinématiques des liaisons (vitesses, vitesses de rotation).

Lorsque l'on effectue une fermeture cinématique, on présuppose qu'une fermeture géométrique a été réalisée avant et que les **paramètres géométriques sont connus**.

Remarque : pour obtenir la même expression littérale des relations entre inconnues cinématiques par les deux méthodes (dérivation de la fermeture géométrique, fermeture cinématique), il est vivement conseillé d'effectuer les mêmes choix de bases de projections au risque de devoir manipuler des formules trigonométriques très complexes. Toutefois, cette règle n'est pas toujours vraie.

A.V.2.c Cinématique graphique

La cinématique graphique permet de déterminer des vitesses pour **des problèmes plans dans des situations particulières**. En effet, les relations obtenues ne seront vraies que pour la situation dessinée.

La cinématique graphique ne permet pas que de résoudre les mécanismes, elle permet aussi de déterminer des vitesses dans le cas de chaînes ouvertes.

A.V.3 Fermeture géométrique

La fermeture géométrique consiste en l'établissement de deux relations :

- Relation de Chasles sur les vecteurs du système en partant d'un point et en arrivant au même point en passant par tous les points intermédiaires décrivant la chaîne étudiée qui sera nulle
- Fermeture angulaire en partant d'une base et en allant à la même base en décrivant tous les mouvements de rotation intermédiaires dont la somme sera nulle

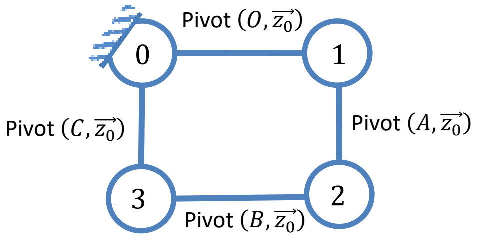
En écrivant ces deux relations, on obtient un système de 6 équations (3 en mécanismes plans) qu'il faut résoudre afin de déterminer les relations souhaitées, en particulier la relation entrée/sortie.

Généralement, on applique la fermeture géométrique sur des mécanismes plans. L'application 3D est plus complexe, et sera simplement présentée.

A.V.3.a Mécanismes plans

A.V.3.a.i Relations de Chasles

Prenons l'exemple d'un mécanisme possédant plusieurs points caractéristiques (O, A, B, C) décrit par le graphe des liaisons suivant :



• **Relation de Chasles**

La fermeture géométrique va conduire à écrire **l'équation vectorielle** suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \ (Chasles)}$$

Le principe consiste à partir d'un point d'une liaison de la chaîne étudiée, de faire le tour de la chaîne en passant par les points de chaque liaison, et de revenir au point de départ.

Ensuite, exprimer chaque vecteur en fonction des paramètres géométriques du mécanisme :

$$ex: L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} \dots = \vec{0}$$

Dans le cas des mécanismes plans, après avoir détaillé ces différents vecteurs en fonction du paramétrage du mécanisme, on choisit une base $\mathfrak{B}_i$ de projection afin d'obtenir deux **équations scalaires** :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}\right).\overrightarrow{x_i} = 0 \\ \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}\right).\overrightarrow{y_i} = 0 \end{cases}$$

• **Fermeture angulaire**

La fermeture géométrique va conduire à écrire **l'équation scalaire** faisant intervenir toutes les rotations le la chaîne étudiée (relation de Chasles angulaire pour les mécanismes plans) :

$$\boxed{(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_0}}) = 0}$$

Ce résultat simple est issu du fait qu'en mécanismes plans, tous les mouvements de rotations ont lieu selon le même axe $\vec{z}$.

A.V.3.a.ii Résolution des systèmes obtenus

• **Formes des systèmes à résoudre**

Tout mécanisme plan à une chaîne cinématique ($\gamma = 1$) composé d'une mobilité (un mouvement imposé permet de déterminer tous les mouvements du mécanisme) sera toujours composé au maximum de 4 inconnues de liaisons, soit translations, soit rotations (nous verrons cela dans un prochain paragraphe concernant la résolution par fermeture cinématique). Ci-dessous, nous proposons un tableau récapitulant toutes les solutions de mécanismes plans possible (2 premières colonnes) :

Liaisons	Nombre de pièces P	Forme de la relation de Chasles
4 pivots	$P = 4$	$a\overrightarrow{x_i} + b\overrightarrow{x_j} + c\overrightarrow{x_k} + d\overrightarrow{x_l} + \vec{k} = \vec{0}$
4 glissières	$P = 4$	
3 pivots 1 glissière	$P = 4$	
3 glissières 1 pivot	$P = 4$	
2 glissières 2 pivots	$P = 4$	
1 ponctuelle 2 pivots	$P = 3$	$a\overrightarrow{x_i} + b\overrightarrow{x_j} + c\overrightarrow{x_k} = \vec{0}$
1 ponctuelle 2 glissières	$P = 3$	
1 ponctuelle 1 glissière 1 pivot	$P = 3$	
2 ponctuelles	$P = 2$	$a\overrightarrow{x_i} + b\overrightarrow{x_j} = \vec{0}$

Les mécanismes plans sont donc toujours composés au maximum de 4 rotations.

Supposons que lors que la mise en place de la relation de Chasles de la fermeture géométrique, on exprime 1 unique vecteur en passant dans chaque pièce. On peut donc ajouter une colonne au tableau ci-dessus avec la forme de la relation de Chasles obtenue.

La complexité des résolutions de problèmes géométrique à la main réside dans le nombre de cosinus et sinus d'angles variables présents. D'une manière générale, en introduisant (u, v, w), longueurs fixes ou variables, les différents cas de figure seront les suivants :

$$\begin{cases} u\cos\theta_j + v\cos\theta_k + w\cos\theta_l + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + v\sin\theta_k + w\sin\theta_l + t_y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} u\cos\theta_j + v\cos\theta_k + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + v\sin\theta_k + t_y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} u\cos\theta_j + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + t_y = 0 \end{cases}$$

u, v, w, t_x, t_y sont soit des variables, soit des constantes, en fonction des problèmes traités

Attention, selon le choix de la base de projection, on peut ou non faire apparaître des équations qui simplifieront la résolution par la suite, on saura la choisir avec l'expérience…

Dans tous les problèmes, l'une des variables de ces équations est supposée connue, c'est l'entrée, on cherche alors les autres variables, souvent d'ailleurs l'unique variable de sortie qui nous intéresse, en fonction de l'entrée connue.

• **Cas de 1 cos et 1 sin par équation**

$$\begin{cases} u\cos\theta_j + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + t_y = 0 \end{cases}$$

Supposons par exemple que l'on cherche la relation entre u et θ_j, t_x et t_y constants :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\cos\boldsymbol{\theta_j} + t_x = 0 \\ \boldsymbol{u}\sin\boldsymbol{\theta_j} + t_y = 0 \end{cases}$$

On a immédiatement :

$$\begin{cases} u = -\dfrac{t_x}{\cos\theta_j} \\ u = -\dfrac{t_y}{\sin\theta_j} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \theta_j = \pm\cos^{-1}\left(-\dfrac{t_x}{u}\right) \\ \theta_j = \begin{cases} \sin^{-1}\left(-\dfrac{t_y}{u}\right) \\ \pi - \sin^{-1}\left(-\dfrac{t_y}{u}\right) \end{cases} \end{cases}$$

• **Cas de 2 cos et 2 sin par équation**

$$\begin{cases} u\cos\theta_j + v\cos\theta_k + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + v\sin\theta_k + t_y = 0 \end{cases}$$

Supposons par exemple le cas classique d'un système bielle/manivelle où l'on cherche la relation entre θ_k et t_y, t_y, θ_j, θ_k étant des variables et t_x, u, v des constantes :

$$\begin{cases} u\cos\boldsymbol{\theta_j} + v\cos\boldsymbol{\theta_k} + t_x = 0 \\ u\sin\boldsymbol{\theta_j} + v\sin\boldsymbol{\theta_k} + \boldsymbol{t_y} = 0 \end{cases}$$

Il existe deux méthodes qui seront vues en TD sur le système Bielle/Manivelle.

Soit à l'aide de la première équation, on exprime $\cos\theta_k$ puis on remplace $\sin\theta_k = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta_k}$ dans la seconde équation. Sinon, on exprime $\cos\theta_k$ et $\sin\theta_k$ puis on écrit $\cos^2\theta_k + \sin^2\theta_k = 1$

Remarque : pour déterminer laquelle des solutions est la bonne lorsqu'il y a un $\pm$, il suffit d'isoler la racine d'un côté de l'équation $\pm\sqrt{\dots} = \cdots$ et d'étudier le signe de ce qui est devant l'égalité dans le cas du mécanisme étudié afin de trouver la bonne solution. D'autres montages du mécanisme justifient la présence de plusieurs solutions (cf TD Bielle Manivelle).

• **Cas de 3 cos et 3 sin par équation**

$$\begin{cases} u\cos\theta_j + v\cos\theta_k + w\cos\theta_l + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + v\sin\theta_k + w\sin\theta_l + t_y = 0 \end{cases}$$

Supposons le cas d'un système à 4 pivots, les 3 angles sont variables, les autres données sont des constantes. Ce cas est le plus complexe. Il est nécessaire d'identifier la relation souhaitée, par exemple la relation entre θ_j et θ_l, de faire disparaître le paramètre non souhaité.

$$\begin{cases} u\cos\boldsymbol{\theta_j} + v\cos\boldsymbol{\theta_k} + w\cos\boldsymbol{\theta_l} + t_x = 0 \\ u\sin\boldsymbol{\theta_j} + v\sin\boldsymbol{\theta_k} + w\sin\boldsymbol{\theta_l} + t_y = 0 \end{cases}$$

Remarque : Le choix de la base de projection a de l'importance si l'on souhaite n'avoir que du θ_j et du θ_k dans les cos et sin !

On exprime $cos\,\theta_k$ et $sin\,\theta_k$ dans les deux équations, on utilise la formule $\cos^2\theta_k + \sin^2\theta_k = 1$, on simplifie l'expression, puis on doit utiliser des formules mathématiques. Cette résolution est assez complexe, les outils nécessaires sont les suivants :

Formules de De Moivre :

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad ; \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

$$e^x \pm e^y = e^{\frac{x+y}{2}}\left(e^{\frac{x-y}{2}} \pm e^{-\frac{x-y}{2}}\right)$$

Avec i, on obtient les formules de Simpson, ou « de Werner », ou « de Prostaferesi » :

$$e^{ix} \pm e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} \pm e^{-i\frac{x-y}{2}}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

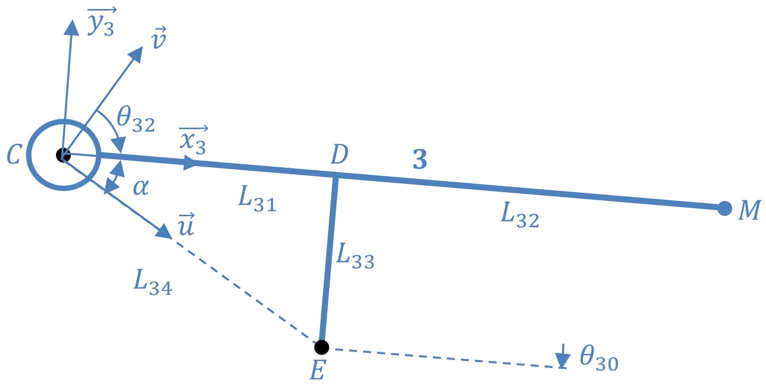
Il peut aussi être intéressant d'utiliser les formules de tangente de l'angle moitié sur y afin de se ramener à la résolution d'un polynôme de degré 2 :

$$Y = \tan\frac{y}{2} \quad ; \quad \cos y = \frac{1-Y^2}{1+Y^2} \quad ; \quad \sin y = \frac{2Y}{1+Y^2}$$

Dans ce cas, penser à traiter à part le cas $y = \pi$

• **Plus de 3 cos et 3 sin ?**

Si l'on fait apparaître plus de 3 cosinus et 3 sinus, c'est qu'au moins un des « passages » dans une pièce lors de la fermeture géométrique a été fait en utilisant 2 vecteurs. Exemple :



$$\overrightarrow{CE} = L_{31}\vec{x_3} - L_{33}\vec{y_3}$$

Il vaut donc mieux utiliser $\vec{u}$: $\overrightarrow{CE} = L_{34}\vec{u}$ et faire attention à l'angle non orienté α lors des projections.

Toutefois, si la projection de l'équation de la fermeture a lieu dans la pièce en question, on remarque qu'il n'est pas nécessaire de passer par $\vec{u}$, on fera juste apparaître les constantes L_{31} et L_{32} dans les équations.

• **Remarque**

Nous n'avons pas ici traité tous les cas de figure, étant donné que nous avons choisi ce qui était fixe ou variable dans les 3 systèmes étudiés. Toutefois, nous avons abordé les méthodes usuelles et dans les autres cas, les résolutions seront identiques ou plus simples.

• **Conclusion**

En conclusion, d'une manière générale :

Privilégier l'utilisation d'un seul vecteur par pièce lors de l'écriture de la relation de Chasles

A.V.3.b Mécanismes 3D

A.V.3.b.i Relation de Chasles

Comme précédemment, la fermeture géométrique va conduire à écrire **l'équation vectorielle** suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}\ (Chasles)}$$

Ensuite, exprimer chaque vecteur en fonction des paramètres géométriques du mécanisme :

$$ex: L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} \dots = \vec{0}$$

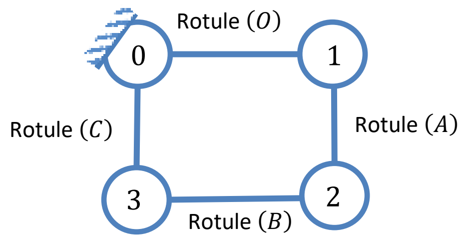
Finalement, obtenir 3 **équations scalaires** :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\overrightarrow{x_i} = 0 \\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\overrightarrow{y_i} = 0 \\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\overrightarrow{z_i} = 0 \end{cases}$$

A.V.3.b.ii Fermeture angulaire

Contrairement aux mécanismes plans où la relation est simple, en mécanismes 3D, il va falloir écrire les matrices de rotations de chaque liaison et en faire le produit afin d'obtenir 3 équations scalaires en rotation. Cette démarche très longue ne sera jamais appliquée à la main et est présentée ici afin de comprendre comment sont traités les mécanismes 3D.

Soit un mécanisme 3D représenté par le graphe des liaisons suivant :



Il faut écrire les matrices de rotation R_{ji} de chacune des liaisons de la chaîne et écrire l'ensemble des transformations en rotation dont la succession K doit mener à la matrice l'identité :

$$\boxed{K = R_{01}R_{12}R_{23}R_{30} = I}$$

On a alors le choix d'écrire

- les 3 équations associées aux termes de la diagonale : $\begin{cases} K_{11} = 1 \\ K_{22} = 1 \\ K_{33} = 1 \end{cases}$
- 3 équations en piochant dans les termes hors diagonale un terme par ligne :

$$\begin{cases} K_{21} = 0 \\ K_{32} = 0 \\ K_{13} = 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} K_{31} = 0 \\ K_{12} = 0 \\ K_{23} = 0 \end{cases}$$

Evidement, le résultat des mécanismes plans se retrouve en appliquant cette démarche.

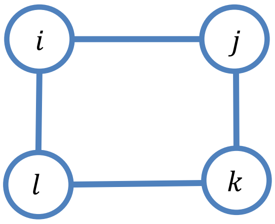
Remarque : Dans un mécanisme présentant des rotations sur des axes orthogonaux, on peut simplement écrire la somme des rotations sur chacun de ces axes nulle (3 équations simples)

A.V.4 Fermeture cinématique

A.V.4.a Définition

La fermeture de chaine cinématique consiste à écrire une somme de torseurs cinématiques qui sera égale au torseur nul.

Prenons l'exemple suivant :



La fermeture de chaine s'écrit alors en passant par TOUTES les liaisons intermédiaires :

$$\{\mathcal{V}_{i/l}\}+\{\mathcal{V}_{l/k}\}+\{\mathcal{V}_{k/j}\}+\{\mathcal{V}_{j/i}\}=\{0\}$$

Ce résultat est issu de la composition des mouvements.

A.V.4.b Erreur à ne pas faire

Il est nécessaire d'exprimer chacun de ces torseurs en utilisant les inconnues cinématiques de la liaison associée.

Certains font l'erreur suivante. Ils expriment correctement les $n-1$ premiers torseurs, puis sans trop réfléchir, expriment le dernier comme somme de tous les autres :

$$\{\mathcal{V}_{i/l}\}=\cdots;\{\mathcal{V}_{l/k}\}=\cdots;\{\mathcal{V}_{k/j}\}\ldots$$

Puis $\{\mathcal{V}_{j/i}\}=-(\{\mathcal{V}_{i/l}\}+\{\mathcal{V}_{l/k}\}+\{\mathcal{V}_{k/j}\})$

Ce qui conduit forcément à trouver à la fin, une équation $\{0\}=\{0\}$

D'autres regroupent deux torseurs. Il écrivent $\{\mathcal{V}_{i/l}\}+\{\mathcal{V}_{l/k}\}=\{\mathcal{V}_{i/k}\}$ mais il n'est alors plus possible d'avoir les inconnues de chaque liaison et on ne peut plus avancer.

PASSER PAR CHAQUE LIAISON ET EXPRIMER SES INCONNUES CINEMATIQUES

A.V.4.c Système linéaire obtenu

A.V.4.c.i Equations - Inconnues

• **Mécanismes 3D**

Une fermeture de chaine apporte 2 équations vectorielles conduisant à 6 équations scalaires. On écrit une fermeture pour chacune des γ chaines cinématiques indépendantes d'un mécanisme.

On note

- E_c le nombre d'équations cinématiques : $E_c = 6\gamma$
- I_c le nombre d'inconnues cinématiques. I_c s'obtient en comptant le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes des torseurs des n liaisons : $I_c = \sum_{i=1}^{n} I_c^i$, I_c^i étant le nombre d'inconnues cinématiques de la liaison i du mécanisme.

• **Mécanismes plans**

- 3 des équations de chaque fermeture de chaîne sont du type $0 = 0$. On peut donc définir le nombre d'équations en plan : $E_c^{2D} = 3\gamma$
- La mobilité (définie au paragraphe suivant) peut, mais c'est rare, diminuer (mobilité interne qui disparaît par exemple), on définit donc m^{2D}
- Les nombres d'inconnues cinématiques des liaisons encastrement, pivot et glissière sont inchangés. Par contre, la ponctuelle est modifiée $I_c^{2D}(ponctuelle) = 2$ (cf liaisons normalisées) et inconnues liaisons

I_c	3D	2D
Encastrement	0	0
Pivot	1	1
Glissière	1	1
Ponctuelle	5	2

A.V.4.c.ii Forme matricielle du système

Le système linéaire obtenu par la fermeture cinématique peut se mettre sous forme matricielle. Cette matrice, que nous noterons K_c en cinématique, possède des propriétés mathématiques dont nous parlerons par la suite. Traitons un exemple pour voir comment la définir. Soit le système linéaire suivant dont les inconnues sont (x, y, z, t):

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y + z = 0 \\ x + y + t = 0 \end{cases}$$

On peut écrire :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Appelons le vecteur inconnu $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ et V le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

On a donc : $K_c U = V$

La matrice cinématique du problème est donc la matrice :

$$K_c = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On remarquera que si l'on définit l'ordre des inconnues du vecteur U différemment, la matrice va subir des permutations de colonnes, et selon l'ordre pris pour les 3 équations, des permutations de lignes. Ces changements n'auront aucune influence sur ses caractéristiques mathématiques.

Pour résoudre ce système, on voit qu'il y a une inconnue en trop (4 inconnues pour 3 équations). Dans nos systèmes, il y aura des mouvements possibles, c'est-à-dire des mobilités. Supposons que le système étudié présente une mobilité, il y aura donc l'une de ces 4 inconnues qui sera imposée (moteur, vérin…). Supposons que l'on impose la variable x. On va donc arranger le système afin de mettre dans le vecteur de droite toutes les données :

$$\begin{cases} b_1 y = -a_1 x \\ b_2 y + z = -a_2 x \\ y + t = -x \end{cases}$$

Finalement, il faudra résoudre :

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 x \\ -a_2 x \\ -x \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_1 x \\ -a_2 x \\ -x \end{bmatrix}$$

A.V.4.c.iii Rang – Mobilité – Hyperstatisme

• **Cas général**

Le système d'équations obtenu est un système linéaire qui présente un rang noté r_c.

$$r_c = rang(K_c)$$

Le rang d'un système linéaire correspond au nombre d'équations qui servent, c'est-à-dire au nombre d'inconnues que l'on pourra déterminer.

On a forcément :

$$r_c \leq E_c$$

Le nombre d'inconnues cinématiques indéterminées par la résolution du système linéaire obtenu correspond au nombre de mobilités m du mécanisme, c'est-à-dire au nombre de degrés de liberté qu'il faut piloter afin de définir l'intégralité des mouvements des pièces du mécanisme. Autrement dit, il correspond au nombre minimum de degrés de liberté à bloquer afin que chacune des pièces du mécanisme ne puisse plus bouger.

$$m = I_c - r_c$$

Nombre d'inconnues à fixer = Nombre d'inconnues total – nombre d'inconnues déterminées

On remarque que sans même faire de mathématiques sur un système d'équations compliqué, comme nous étudions des mécanismes réels, il nous est possible d'estimer la mobilité « à la main » et d'en déduire le rang du système. On pourra alors en déduire le degré d'hyperstatisme défini ci-dessous.

Le nombre d'équations inutiles du système cinématique correspond à ce que l'on appelle le degré d'hyperstatisme h du mécanisme. Cette notion sera développée dans le chapitre de statique des solides.

$$h = E_c - r_c$$

Nombre d'équations inutiles = Nombre d'équations – nombre d'équations utiles

De même que pour la mobilité, si on arrive à estimer le degré d'hyperstatisme d'un système « à la main » (cf statique), on pourra en déduire le rang du système cinématique et donc la mobilité. C'est toutefois plus délicat que d'estimer la mobilité.

On a :

$$h = m + E_c - I_c$$

• **Cas des mécanismes plans**

A la main, nous traiterons majoritairement des mécanismes plans. D'ailleurs, la majorité des systèmes simples se modélisent en plan.

On peut définir le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme plan en plan :

$$h^{2D} = m^{2D} + {E_c}^{2D} - I^{2D}$$

Remarque sur le lien entre 2D et 3D : En mécanismes plans (3 équations $0 = 0$), on trouvera toujours un degré d'hyperstatisme 3D supérieur ou égal à 3 : $h^{3D} = 3 + h^{2D}$, avec h^{3D} le degré d'hyperstatisme du modèle plan en 3D. Lorsque le mécanisme ne présente que des pivots et des glissières, le modèle plan est identique au modèle 3D. Mais dès qu'il y a des ponctuelles, il faut faire attention à l'interprétation de ces équations. En effet, une ponctuelle 2D présente 2 inconnue cinématiques en plan, une ponctuelle 3D en a 5 en 3D, mais le modèle 2D d'une ponctuelle présente 2 inconnues cinématiques en 3D car c'est une liaison qui ne peut se déplacer hors plan. Il faut donc faire attention aux raisons qui ont poussé à proposer une ponctuelle plane dans un modèle plan car elle peut provenir d'une ponctuelle 3D comme de l'association en série (par exemple) d'une glissière et d'une pivot. On voit que le modèle 3D associé à ces 2 solutions n'est pas le même et parler de h^{3D} peut porter à confusion, parle-t-on du degré d'hyperstatisme du modèle plan mis en 3D, ou du modèle 3D réel dont la modélisation plane a induit une réduction des liaisons. La formule $h^{3D} = 3 + h^{2D}$ est donc toujours juste lorsqu'un mécanisme est réalisé en 2D et en 3D uniquement des pivots et glissières, et soumis à interprétation lorsqu'il y a des ponctuelles en plus dans le modèle 2D.

Par ailleurs, tout mécanisme plan composé d'une seule chaîne fermée ($\gamma = 1$) et ayant une seule mobilité possède au maximum 4 inconnues cinématiques.

En effet, le rang r_c vaut de 0 à 3, sa valeur maximale est donc 3, et :

$$I_c = r_c + m$$

Sachant qu'en modélisation plane, on ne trouve que les liaisons encastrement ($I_c^{2D} = 0$), pivot ($I_c^{2D} = 1$), glissière ($I_c^{2D} = 1$) et ponctuelle ($I_c^{2D} = 2$), les mécanismes à une mobilité sont donc les mécanismes composés de :

$m = 1$			
$r_c = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_c = 1 \\ h = 3 \end{cases}$	$r_c = 1 \Rightarrow \begin{cases} I_c = 2 \\ h = 2 \end{cases}$	$r_c = 2 \Rightarrow \begin{cases} I_c = 3 \\ h = 1 \end{cases}$	$r_c = 3 \Rightarrow \begin{cases} I_c = 4 \\ h = 0 \end{cases}$
1 pivot	2 pivots	3 pivots	4 pivots
1 glissière	2 glissières	3 glissières	4 glissières
	1 ponctuelle	2 pivots 1 glissière	3 pivots 1 glissière
		1 pivot 2 glissières	3 glissières 1 pivot
		1 pivot 1 ponctuelle	2 glissières 2 pivots
		1 glissière 1 ponctuelle	1 ponctuelle 2 pivots
			1 ponctuelle 2 glissières
			1 ponctuelle 1 glissière 1 pivot
			2 ponctuelles

Les 3 premières colonnes de ce tableau correspondent à des systèmes hyperstatiques, ils seront moins courants que ceux de la dernière colonne.

Vous verrez donc que quasiment tous les problèmes plans que vous traiterez seront les mécanismes correspondant à la dernière colonne de ce tableau, avec 4 inconnues.

A.V.4.c.iv Solvabilité cinématique d'un mécanisme

Un mécanisme est toujours solvable cinématiquement.

S'il ne présente aucune mobilité, on montrera que toutes les inconnues cinématiques sont nulles.

S'il présente au moins une mobilité, on pourra toujours exprimer toutes les inconnues cinématiques en fonction de m mobilités.

Comme $r_c \leq E_c$ et $m = I_c - r_c$:

$$-r_c \geq -E_c$$

$$I_c - r_c \geq I_c - E_c$$

$$I_c - r_c \geq I_c - E_c$$

$$m \geq I_c - E_c$$

Ainsi, s'il y a plus d'inconnues que d'équations, la mobilité est au moins égale au nombre d'inconnues en trop.

Si elle est juste égale : $h = m + E_c - I_c = m - (I_c - E_c) = m - m = 0$

Si elle est supérieure : $h = m - (I_c - E_c) > 0$

A.V.4.d Définition des torseurs au départ

En cinématique, il arrive qu'il y ait la présence de plusieurs chaînes cinématiques fermées. Et ces chaînes présenteront quasiment toujours des liaisons en commun. Prenons pour l'exemple deux chaînes présentant la liaison L_{ij} en commun.

La résolution cinématique du problème nous conduira à réaliser une première fermeture de chaîne.

Parmi les liaisons de cette chaîne, on trouvera le torseur $\{\mathcal{L}_{j/i}\}$. On va alors probablement le définir en un point et dans une base arrangeants pour traiter cette première fermeture de chaîne.

Ensuite, il faudra effectuer la fermeture de la seconde chaîne fermée, et on devra à nouveau utiliser le torseur $\{\mathcal{L}_{i/j}\}$ ou $\{\mathcal{L}_{j/i}\}$. Et c'est ici qu'il y a un gros risque d'erreurs. Souvent, on oublie que ce torseur a déjà été utilisé et on se permet alors de le redéfinir en un point et dans une base qui pourraient être différents des choix faits pour la première fermeture de chaîne, ce qui est une erreur. Attention, il faut reprendre le torseur qui a été défini lors de la première fermeture, et le changer de point et de base si nécessaire.

Une solution intéressante pour éviter cette erreur consiste à créer un tableau avant d'effectuer les fermetures de chaîne du mécanisme, dans lequel on écrit chacun des torseurs des liaisons du système sans forcément choisir de point et de base. Puis, lors de la réalisation de chaque fermeture, on vient piocher les torseurs dans ce tableau, en les complétant alors avec les choix effectués si ce n'est déjà fait.

A.V.4.e Mise en œuvre pour chaque chaine

On écrit la fermeture cinématique associée à la chaîne étudiée :

$$\{\mathcal{V}_{i/l}\} + \{\mathcal{V}_{l/k}\} + \{\mathcal{V}_{k/j}\} + \{\mathcal{V}_{j/i}\} = \{0\}$$

On écrit les différents torseurs des liaisons en leurs points caractéristiques :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{i/l}} \\ \vec{V}(A,i/l) \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{l/k}} \\ \vec{V}(B,l/k) \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{k/j}} \\ \vec{V}(C,k/j) \end{Bmatrix}_C + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(D,j/i) \end{Bmatrix}_D = \{0\}$$

Remarque : on pourra définir ces torseurs en notation verticale car c'est une notation simple à retenir, mais nous passerons tout de suite après à une notation vectorielle lors de l'expression de ceux-ci au même point.

On déplace alors tous les torseurs au même point en utilisant la formule de Varignon :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{i/l}} \\ \vec{V}(M,i/l) \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{l/k}} \\ \vec{V}(M,l/k) \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{k/j}} \\ \vec{V}(M,k/j) \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \{0\}$$

On obtient alors 2 équations vectorielles :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{i/l}} + \overrightarrow{\Omega_{l/k}} + \overrightarrow{\Omega_{k/j}} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \vec{0} \quad (\overrightarrow{Eq1} = \vec{0}) \\ \vec{V}(M,i/l) + \vec{V}(M,l/k) + \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i) = \vec{0} \quad (\overrightarrow{Eq2} = \vec{0}) \end{cases}$$

Il reste alors à obtenir 6 équations scalaires en projection dans une ou deux bases $\mathfrak{B}_m(\overrightarrow{x_m}, \overrightarrow{y_m}, \overrightarrow{z_m})$ $\mathfrak{B}_n(\overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{y_n}, \overrightarrow{z_n})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{x_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{y_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{z_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{x_n} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{y_n} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{z_n} = 0 \end{cases}$$

Remarques :

- On prend généralement les même bases ($\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}_n$), mais ce n'est pas une obligation

- Il est obligatoire de projeter un MÊME vecteur sur LES TROIS vecteurs de la MÊME base afin de résoudre complètement un problème (relation d'équivalence)

- il peut être possible, en projetant une équation sur un seul vecteur, puis sur un seul autre, pas forcément orthogonal au premier, d'obtenir des relations recherchées, puisqu'elles sont vraies quelle que soit la projection, suffisantes pour résoudre le problème. Toutefois, il n'y aura alors pas obligatoirement équivalence entre le système d'équation et la solution obtenue. On ne recherche pas forcément toutes les solutions !

- En mécanismes plans dont les rotations sont portées par le même vecteur $\vec{z}$, on aura uniquement 3 équations scalaires en projection dans une base $\mathfrak{B}_m(\overrightarrow{x_m}, \overrightarrow{y_m}, \overrightarrow{z_m})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{z_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{x_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{y_m} = 0 \end{cases}$$

A.V.4.f Choix de points et bases

Lors de la mise en œuvre d'une fermeture cinématique, on doit choisir

- un point où exprimer tous les torseurs afin de les sommer
- une base afin de projeter les deux équations vectorielles et obtenir 6 équations scalaires

Ce choix doit être fait pour chaque chaine étudiée, mais ne doit pas forcément être le même pour chacune.

L'objectif peut être double :

- simplifier au plus les calculs afin d'obtenir des équations les plus simples possible
- obtenir la relation voulue au plus vite

A.V.4.f.i Préliminaires – Choix initiaux

• **Explications**

Lors de la résolution d'un exercice, on doit très généralement poser les torseurs de toutes les liaisons avant de mener la résolution et de voir ce qui est attendu. On a donc tendance à choisir arbitrairement un point sur le lieu de validité de chaque torseur et une base dans laquelle il est valable. En regardant ensuite ce qui est demandé, on peut se rendre compte que les choix effectués n'étaient pas forcément les meilleurs :

- un point a été choisi sur le lieu de validité du torseur, mais la question demande un résultat en un autre point appartenant lui aussi au lieu de validité du torseur
- une base a été choisie parmi les bases de définition du torseur mais le résultat est demandé dans une autre base qui elle aussi était valable pour le torseur posé

Il est alors possible d'effectuer deux choix :

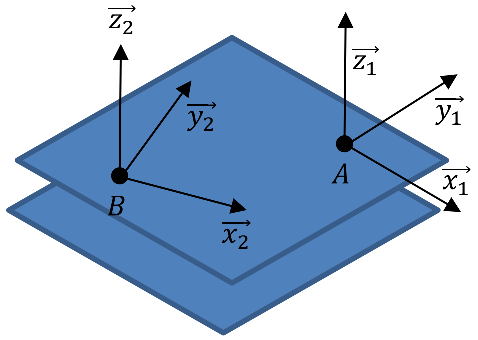
- garder le torseur posé initialement, déterminer ses inconnues au point et dans la base choisis, puis le déplacer au point demandé et le projeter dans la base demandée
- revenir en arrière, effacer points et base et les redéfinir plus judicieusement. Attention, tant que les torseurs n'ont pas été utilisés pour une quelconque résolution, on peut se permettre de revenir en arrière. Par contre, s'ils ont déjà servi, c'est trop tard !

La différence entre les deux démarches proposées ci-dessus se trouvera uniquement dans les valeurs numériques des différentes inconnues des torseurs obtenus.

• **Exemple – Choix de point**

Détaillons un exemple ci-dessous pour mieux comprendre.

Soit un appui-plan présent dans un mécanisme, de normale $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$.



Pour cet exemple, disons que : $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$; $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2}$; $(\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) = \theta_{21}$

On peut définir en début d'exercice ce torseur en tout point de l'espace, il faut en choisir un, choisissons A dans la première démarche, B dans la seconde. De même, on doit choisir une base contenant le vecteur normal $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$, choisissons la base 1 dans la première démarche, 2 dans la seconde. Nous cumulons donc les deux choix différents.

On peut voir les deux démarches suivantes comme deux résolutions de deux élèves différents ayant fait des choix différents au départ, mais ayant pourtant défini les mêmes inconnues U_{21}, V_{21}, R_{21}.

Démarche 1	Démarche 2
Un premier élève pose au départ : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$ Il mène la résolution et trouve une formule pour les 3 inconnues R_{21}, V_{21} et V_{21}. Il fait une application numérique pour une valeur de θ_{21} donnée et trouve $\begin{cases} R_{21} = 7 \\ U_{21} = 1 \\ V_{21} = 1 \end{cases}$	Un deuxième élève pose au départ : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_2}$ Il mène la résolution et trouve une formule pour les 3 inconnues R_{21}, V_{21} et V_{21}. Il fait une application numérique pour la même valeur de θ_{21} et trouve $\begin{cases} R_{21} = 7 \\ U_{21} = 2 \\ V_{21} = 5 \end{cases}$
Les deux élèves se regardent et disent chacun à l'autre qu'il s'est trompé… Et non !	
Si on déplace le torseur du premier élève au point du second et qu'on le projette dans l'autre base : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$ $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{V(A,2/1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21}}$ $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \begin{bmatrix} U_{21} \\ V_{21} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} + \begin{bmatrix} -a_1 \\ -b_1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{21} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} - b_1 R_{21} \\ 0 & V_{21} + a_1 R_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1}$ $\begin{Bmatrix} 0 & (U_{21} - b_1 R_{21}) \cos\theta_{12} - (V_{21} + a_1 R_{21}) \sin\theta_{12} \\ 0 & (U_{21} - b_1 R_{21}) \sin\theta_{12} + (V_{21} + a_1 R_{21}) \cos\theta_{12} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_2}$ Si le premier élève fait l'application numérique, il trouvera que ce torseur vaut : $\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_2}$ On avait : $\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	Si on déplace le torseur du premier élève au point du second et qu'on le projette dans l'autre base : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_2}$ $\overrightarrow{V(A,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21}}$ $\overrightarrow{V(B,2/1)} = \begin{bmatrix} U_{21} \\ V_{21} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{21} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2}$ $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} + b_2 R_{21} \\ 0 & V_{21} - a_2 R_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_2}$ $\begin{Bmatrix} 0 & (U_{21} + b_2 R_{21}) \cos\theta_{21} - (V_{21} - a_2 R_{21}) \sin\theta_{21} \\ 0 & (U_{21} + b_2 R_{21}) \sin\theta_{21} + (V_{21} - a_2 R_{21}) \cos\theta_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1}$ Si le second élève fait l'application numérique, il trouvera que ce torseur vaut : $\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$ On avait : $\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_2}$

On voit donc que poser, au départ de l'exercice, le torseur $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$ est un choix important selon ce qui sera demandé dans la suite. Si dans l'exercice on doit exprimer ce torseur en B dans la base 2, et si ce torseur n'a pas été utilisé par ailleurs, vaut-il mieux :

- le redéfinir en B dans la base 2 dès le départ : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_2}$ et travailler avec cette forme permettant de trouver le résultat numérique immédiatement lors de la résolution
- ne pas le redéfinir, et à la fin de l'exercice, devoir exprimer :

$$\begin{Bmatrix} 0 & (U_{21} - b_1 R_{21}) \cos\theta_{12} - (V_{21} + a_1 R_{21}) \sin\theta_{12} \\ 0 & (U_{21} - b_1 R_{21}) \sin\theta_{12} + (V_{21} + a_1 R_{21}) \cos\theta_{12} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_2}$$

Le choix semble assez clair !

On comprendra maintenant pourquoi on ne doit pas écrire, pour l'appui plan par exemple :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}_2} \text{ MAIS } \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{P}^{\mathfrak{B}_2}, \forall P$$

Car selon le point choisi, les valeurs de U_{21} et V_{21} ne sont pas les mêmes.

• **Exemple – Choix de base**

Soit une liaison rotule de torseur cinématique dans une base $\mathfrak{B}$ quelconque :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

Si dans la résolution d'un problème, plusieurs bases peuvent convenir pour la définition de ce torseur, il est préférable de définir ce torseur directement dans la base qui sera choisie par la suite, plutôt que de la définir dans une base et de changer ensuite.

Exemple :

Définissons $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ par les composantes P_{21}, Q_{21}, R_{21} dans la base $\mathfrak{B}_1$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

Imaginons qu'il faille ensuite exprimer tous les torseurs dans la base $\mathfrak{B}_2$, il serait faux d'écrire :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \cancel{\begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_2}}$$

Ce n'est pas parce que la forme canonique du torseur est la même dans toute base que le torseur ne change pas d'une base à l'autre.

Il faudrait écrire :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} P_{21}\cos\theta_{12} - Q_{21}\sin\theta_{12} & 0 \\ P_{21}\sin\theta_{12} + Q_{21}\cos\theta_{12} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_2}$$

On remarquera alors qu'il est préférable, si le torseur n'a pas aiulleurs pas été utilisé dans d'autres chaînes cinématiques, de revenir à sa définition et de le définir directement par :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_2}$$

En ayant évidemment conscience que les 3 inconnues de ce torseur n'ont pas la même valeur numérique que celles du même torseur dans $\mathfrak{B}_1$.

• Conclusion

On retiendra de tout cela la phrase suivante :

Bien qu'il y ait plusieurs choix de bases et de points possibles pour la définition d'un torseur, il faut

- regarder ce qui est demandé dans l'exercice
- effectuer un choix car les composantes sont alors définies pour le point et la base choisis (ne jamais laisser $\forall P$ par exemple)
- avoir conscience que de ces choix dépendent les valeurs numériques finales
    - des composantes de moment pour les différents choix de points
    - de composantes de résultante et de moment pour les choix des bases

• Remarque

L'influence du choix du point sur la valeur des composantes a été mise en évidence dans les tableaux des liaisons (inconnues en rouge et en gras). En cinématique, cela concerne uniquement les 3 liaisons : Appui plan – Linéaire rectiligne – Ponctuelle

A.V.4.f.ii Choix du point

D'une manière générale, le point sera choisi afin de simplifier au plus l'équation vectorielle en vitesse. Pour cela, selon les liaisons présentes, **on choisira très souvent de se placer au point d'une liaison ayant le plus de composantes en résultante, c'est-à-dire en rotation**. Cela n'est pas nécessaire dans le cas particulier où un des torseurs présente une résultante de plus que les autres et si le changement de point doit se faire dans la direction de cette résultante, car le produit vectoriel de la formule de Varignon n'induira pas de nouveaux termes.

Remarque : Parfois, selon le paramétrage donné et les liaisons présentes, un choix différent pourra simplifier les calculs.

Imaginons qu'il y ait dans un cycle une liaison rotule et 3 liaisons pivots :

$$\begin{Bmatrix} P_{il} & 0 \\ Q_{il} & 0 \\ R_{il} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_i} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{lk} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_i} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{kj} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_i} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{ji} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_i} = \{0\}$$

L'équation en rotation est indépendante du point choisi et donnera :

$$P_{il}\overrightarrow{x_i} + Q_{il}\overrightarrow{y_i} + R_{il}\overrightarrow{z_i} + R_{lk}\overrightarrow{z_i} + R_{kj}\overrightarrow{z_i} + R_{ji}\overrightarrow{z_i} = \vec{0}$$

Concernant l'équation de vitesse, quel que soit le point choisi, il y aura 3 produits vectoriels à calculer pour exprimer les 4 vitesses au même point :

$En\ A$	$En\ B\ (C,D)$
$\begin{cases} \vec{V}(A,lk) = R_{lk}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{BA} \\ \vec{V}(A,kj) = R_{kj}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{CA} \\ \vec{V}(A,ji) = R_{ji}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{DA} \end{cases}$	$En\ B\ (C,D)$ $\begin{cases} \vec{V}(B,il) = (P_{lk}\overrightarrow{x_i} + Q_{lk}\overrightarrow{y_i} + R_{lk}\overrightarrow{z_i}) \wedge \overrightarrow{AB} \\ \vec{V}(B,kj) = R_{kj}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{CB} \\ \vec{V}(B,ji) = R_{ji}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{DB} \end{cases}$
$\vec{V}(A,il) + \vec{V}(A,lk) + \vec{V}(A,kj) + \vec{V}(A,ji) = \vec{0}$ $\vec{0} + R_{lk}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{BA} + R_{kj}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{CA} + R_{ji}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{DA} = \vec{0}$	$\vec{V}(B,il) + \vec{V}(B,lk) + \vec{V}(B,kj) + \vec{V}(B,ji) = \vec{0}$ $(P_{lk}\overrightarrow{x_i} + Q_{lk}\overrightarrow{y_i} + R_{lk}\overrightarrow{z_i}) \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{0} + R_{kj}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{CB} + R_{ji}\overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{DB} = \vec{0}$
Plus simple	Plus compliqué

On voit que si l'on ne choisit pas le point où il y a le plus de rotations, on fait apparaître des termes de vitesse qui compliquent les équations finales du système.

Remarque : selon le point choisi, on pourra faire disparaître une vitesse de rotation des équations en vitesse, ce qui peut conduire soit à un effet négatif (on souhaitait des résultats en fonction de cette vitesse de rotation), soit positif (on obtient directement la relation recherchée). Cette remarque dépendra de votre expérience ! Toutefois, quel que soit le point choisi, le résultat après résolution complète sera identique.

A.V.4.f.iii Choix de la base

D'une manière générale, la base sera choisie afin d'obtenir les équations les plus simples possible. Ainsi, on projettera dans la base dans laquelle interviennent le plus de termes.

Exemple : soit l'équation vectorielle suivante obtenue dans un mécanisme plan :

$$a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c\overrightarrow{x_2} = \vec{0}$$

Attention, si deux termes sont en $\overrightarrow{x_2}$ par exemple, ils ne comptent que pour un seul terme après factorisation…

Le choix de la base 1 fait apparaître deux projections de $\overrightarrow{x_2}$:

$$\begin{cases} a + c\cos\theta_{21} = 0 \\ b + c\sin\theta_{21} = 0 \end{cases}$$

Le choix de la base 2 fait apparaître 4 projections de $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$:

$$\begin{cases} a\cos\theta_{12} - b\sin\theta_{12} + c = 0 \\ a\sin\theta_{12} + b\cos\theta_{12} = 0 \end{cases}$$

On choisira donc la base 1.

Il est parfois possible, en choisissant bien la base, d'obtenir immédiatement la relation entrée sortie lorsque c'est le seul résultat voulu.

A.V.4.g Résolution

Après avoir écrit les 6 équations scalaires par chaine (3 en mécanismes plans), on regroupe l'ensemble des équations et on résout le système.

A.V.5 Cinématique graphique (PTSI-PT)

Nous limiterons ce paragraphe à la cinématique graphique de mécanismes plans ou à l'étude de mouvements plans.

A.V.5.a Préliminaires

A.V.5.a.i Contexte

Rappelons qu'une résolution graphique ne donne la relation entre des vitesses que dans la position représentée par le schéma étudié. On privilégiera donc cette méthode lorsque l'on souhaite déterminer la relation cinématique voulue dans une position particulière prédéterminée. On peut par exemple connaître les positions où la vitesse recherchée est soit maximale, soit minimale…

A.V.5.a.ii Conventions choisies

On notera Δ_{ji}^{P} ou Δ_{ij}^{P} la droite support de la vitesse de $\vec{V}(P,j/i)$

On notera $P_{PM}^{P,ji}$ la projection sur $\overrightarrow{PM}$ de $\vec{V}(P,j/i)$: $P_{PM}^{P,ji} = \vec{V}(P,j/i).\overrightarrow{PM}$

Lorsqu'une vitesse sera entièrement connue, nous noterons le symbole V pour l'indiquer.

Lorsque seule sa direction sera connue, nous noterons D pour l'indiquer.

A.V.5.a.iii Précision des résultats

En cinématique graphique, la précision des résultats est très dépendante de différentes choses :

- L'échelle de représentation du mécanisme. Plus le mécanisme sera représenté grand, en respectant une l'échelle, plus les résultats seront précis
- L'échelle de représentation des vitesses (flèches). Plus les flèches seront grandes, plus la résolution sera précise
- Les outils utilisés pour les tracés (règle, compas, équerre, épaisseur des traits)
- L'éventuelle position particulière du mécanisme induisant pour une incertitude de 0,5 mm une grande variation de la vitesse de sortie

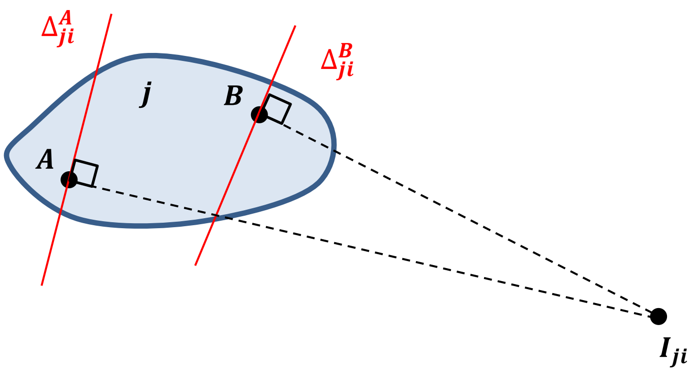
A.V.5.b Les outils en cinématique graphique

Les outils proposés ci-dessous permettent de résoudre tous les problèmes traités en cinématique graphique.

A.V.5.b.i Centre Instantanée de Rotation CIR et théorème des 3 plans glissants

• **Définition du CIR**

Nous avons vu précédemment que tout mouvement qui n'est pas une translation est une rotation autour d'un point fixe ou mobile dans l'espace. Ce point est appelé centre instantanée de rotation et noté CIR. On le notera souvent I_{ij} ou I_{ji} sur les schémas cinématiques.

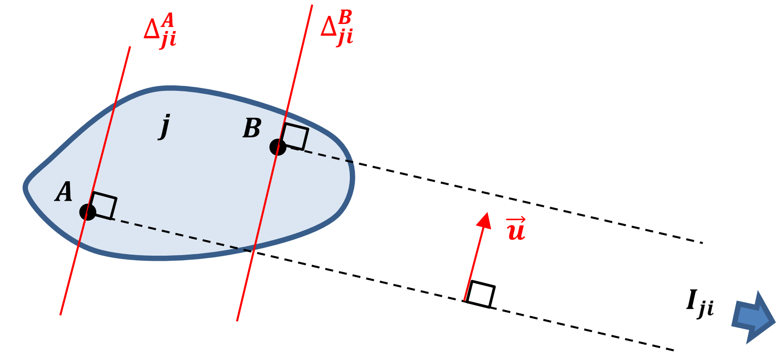


Connaissant le CIR I_{ji} dans le mouvement entre les pièces i et j, la direction Δ_{ji}^{M} de la vitesse $\vec{V}(M,j/i)$ en tout point M de l'espace est orthogonale à la droite liant M à I_{ji}:

$$\boxed{\forall M, \Delta_{ji}^{M} \perp (MI_{ji})}$$

On trouve donc un CIR à l'intersection de deux droites orthogonales à deux directions de vitesses non parallèles connues du mouvement concerné.

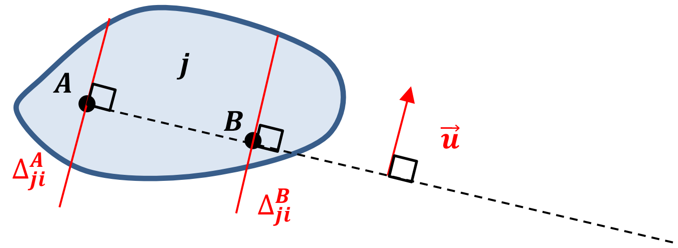
Remarque : dans le cas d'un mouvement de translation entre i et j, le CIR I_{ji} n'est pas défini. On dit parfois qu'il est « à l'infini ».



Propriété :

$$\begin{cases} \exists (A,B)/\Delta_{ji}^{A} \parallel \Delta_{ji}^{B} \parallel \vec{u} \\ \vec{u}.\overrightarrow{AB} \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow Mouvement\ j/i : translation$$

Si $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$, c'est soit une translation, soit une rotation autour d'un point de la droite (AB)



Quoi qu'il arrive :

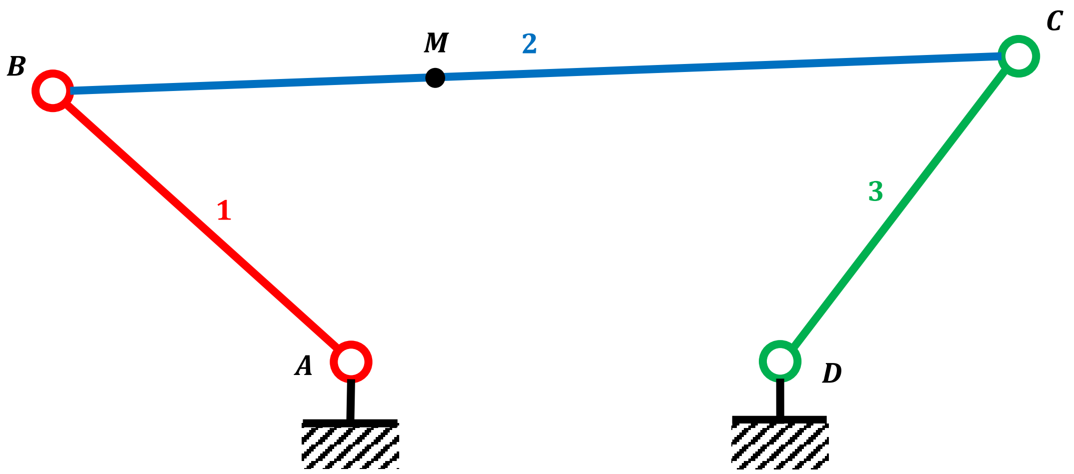
$$si \begin{cases} A \neq B \\ \vec{V}(A,j/i) = \vec{V}(B,j/i) \end{cases} \Rightarrow Mouvement\ de\ translation$$

• **Théorème des 3 plans glissants**

Si 3 pièces sont en mouvement plan les unes par rapport aux autres, alors les 3 CIR de mouvements relatifs des unes par rapport aux autres sont alignés.

• **Exemple**

Soit le mécanisme suivant :



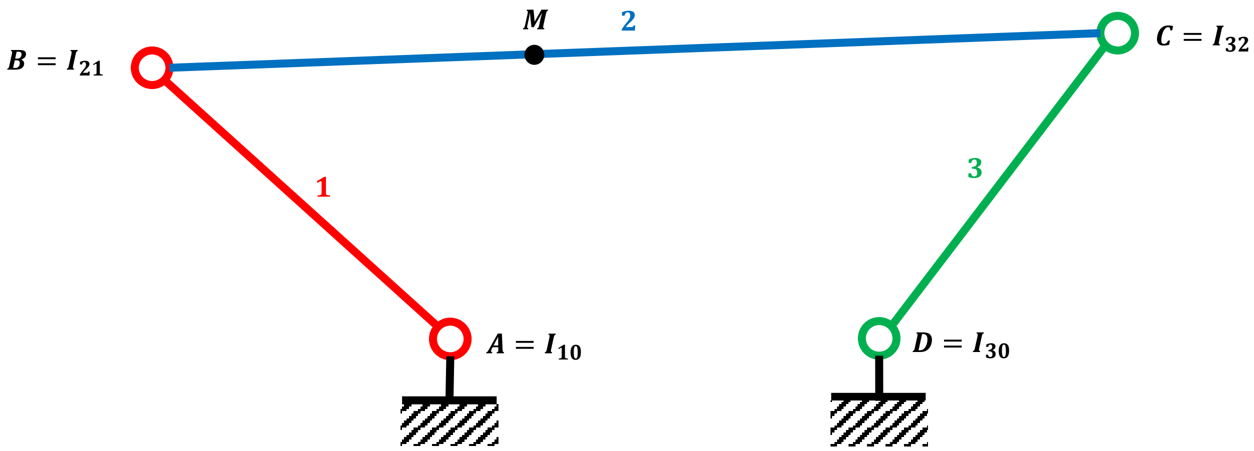
Déterminons d'abord les CIR vus immédiatement sur le schéma :

A est le CIR du mouvement de 1 par rapport à 0

B est le CIR du mouvement de 2 par rapport à 1

D est le CIR du mouvement de 3 par rapport à 0

C est le CIR du mouvement de 3 par rapport à 2



Déterminons ensuite le CIR du mouvement de la pièce 2 par rapport à 0 :

Méthode 1 : utilisation du théorème des 3 plans glissants

Les pièces 1,2 et 3 sont en mouvement plan les unes par rapport aux autres, on sait donc que :

$$I_{21}, I_{10}, I_{20} \text{ alignés } \& \ I_{23}, I_{30}, I_{20} \text{ alignés}$$

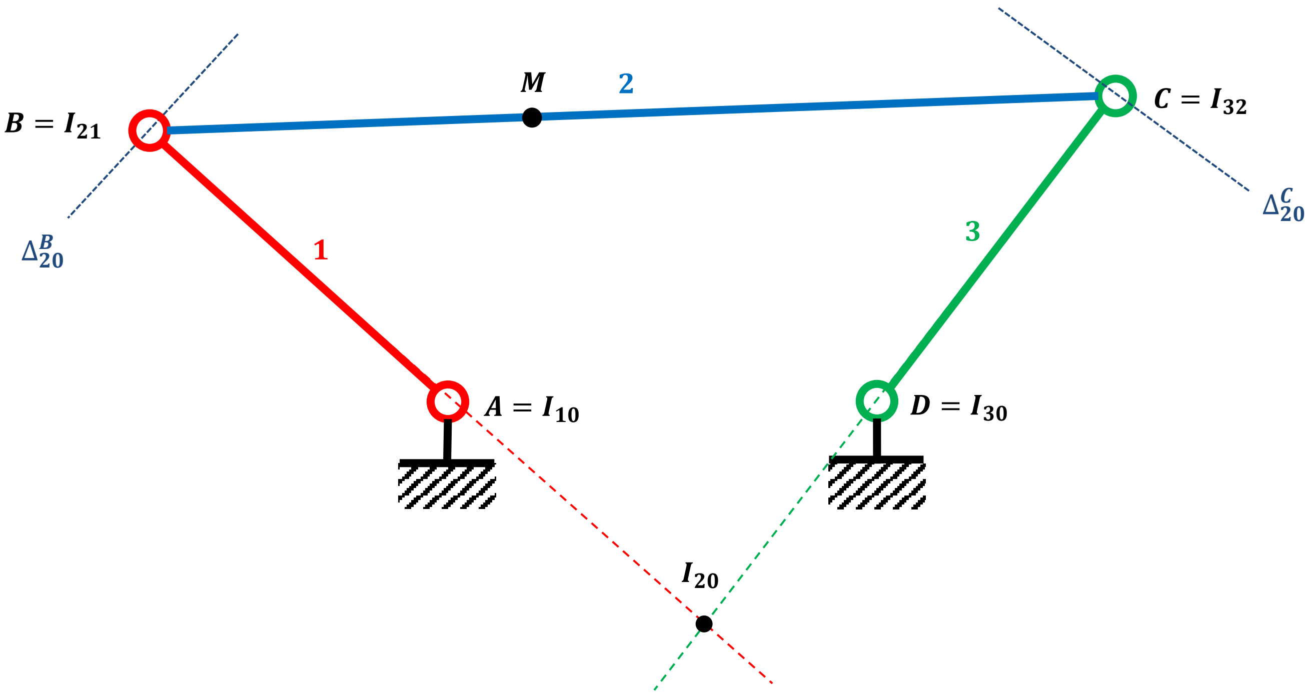
On en déduit la position de I_{20} connaissant $I_{21}, I_{10}, I_{23}, I_{30}$

Méthode 2 : Utilisation des directions Δ_{20}^B et Δ_{20}^C des vitesses $\vec{V}(B,2/0)$ et $\vec{V}(C,2/0)$

$$\vec{V}(B,2/0) = \vec{V}(B,1/0) \ \Rightarrow \Delta_{20}^B = \Delta_{10}^B \ et \ I_{10} \ connu \ \Rightarrow \Delta_{10}^B \perp (I_{10}B) \ soit \ \Delta_{20}^B \perp (AB)$$

$$\vec{V}(C,2/0) = \vec{V}(C,3/0) \ \Rightarrow \Delta_{20}^C = \Delta_{30}^C \ et \ I_{30} \ connu \ \Rightarrow \Delta_{30}^C \perp (I_{30}C) \ soit \ \Delta_{20}^C \perp (DC)$$

On en déduit I_{20} à l'intersection de deux droites (AB) et (DC)



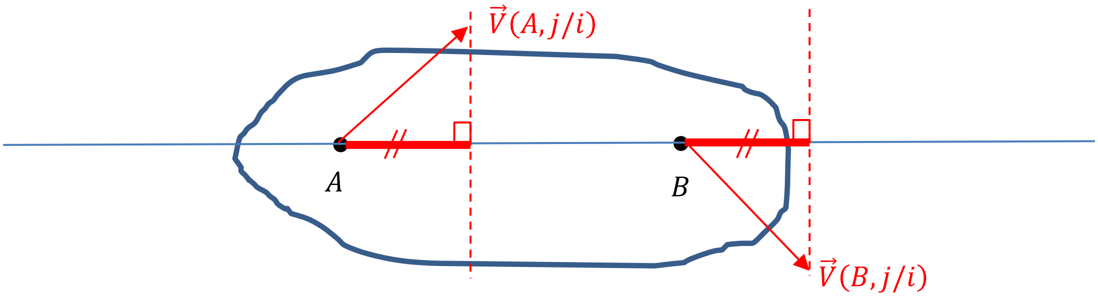
A.V.5.b.ii Triangle des vitesses et Equiprojectivité

Les deux outils proposés ici sont assez similaires et permettent de déterminer une norme d'une vitesse connaissant sa direction et une autre vitesse (norme et direction) dans le mouvement étudié.

• **<u>Equiprojectivité</u>**

Rappelons la propriété d'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide :

$$\forall (A,B) \in S_j, \vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB}$$

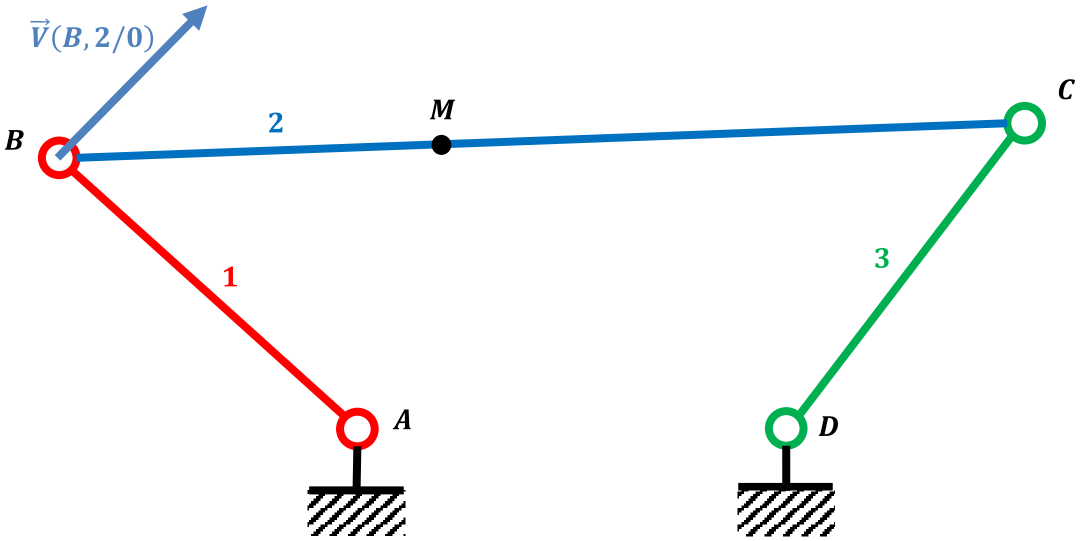


Avec les notations proposées plus tôt, on a :

$$\boxed{P_{AB}^{A,ji} = P_{AB}^{B,ji}}$$

Remarque : un produit scalaire a un signe, il faut donc faire attention : si la projection en A sur $\overrightarrow{AB}$ va dans le sens de A vers B, la projection en B sur $\overrightarrow{AB}$ va dans le même sens.

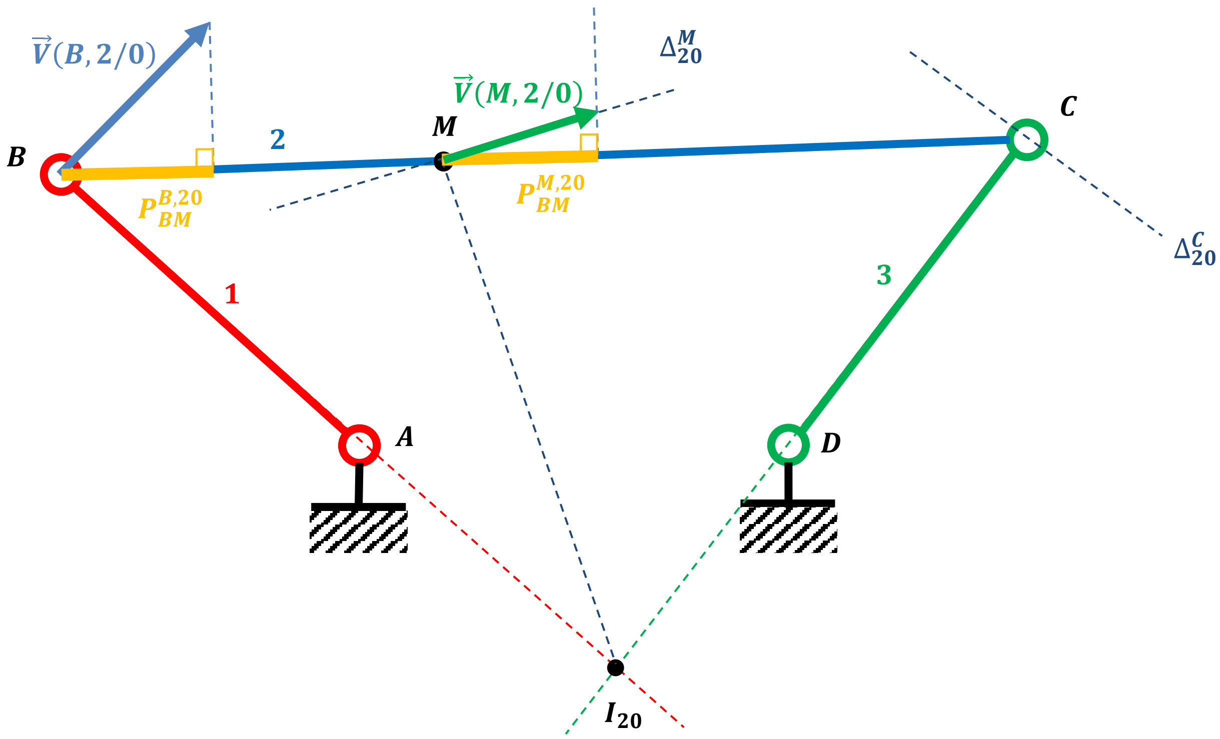
Exemple : Reprenons le cas étudié précédemment. Supposons que la vitesse $\vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(B,2/0)$ soit donnée. On chercher la vitesse $\vec{V}(M,2/0)$



La connaissance de I_{20} nous donne Δ_{20}^{M} orthogonale à $I_{20}M$.

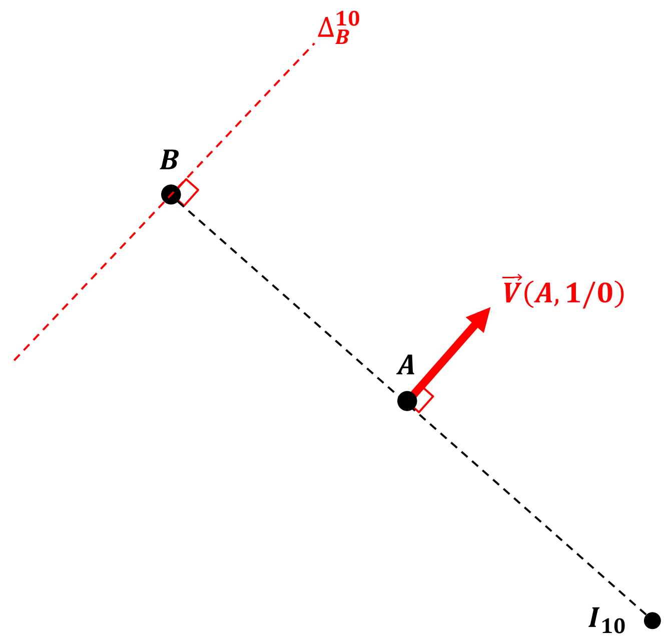
La donnée de $\vec{V}(B,2/0)$ nous donne la projection $P_{BM}^{B,20} = \vec{V}(B,2/0).\overrightarrow{BM}$

On a : $P_{BM}^{B,20} = P_{BM}^{M,20}$. On reporte donc cette projection en M en respectant le signe de cette projection puis on en déduit $\vec{V}(M,2/0)$.

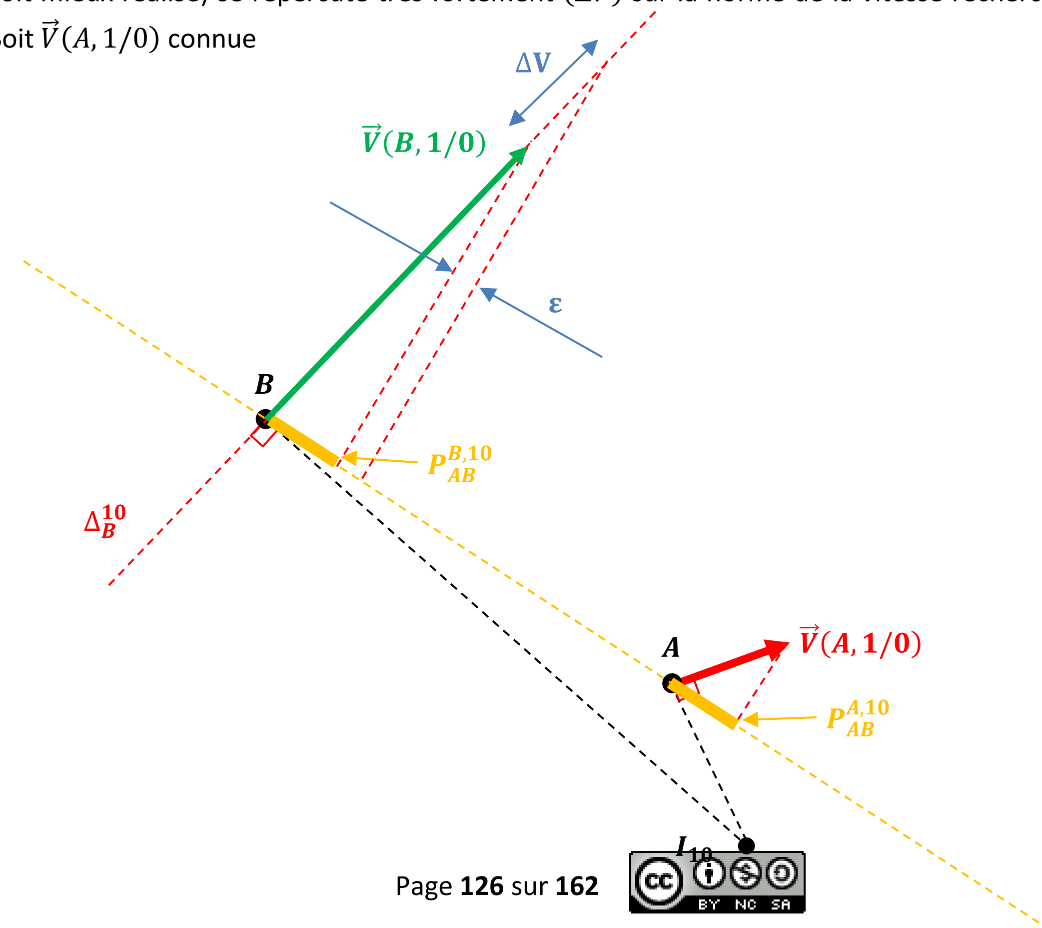


L'équiprojectivité possède des limites :

- Cas d'une projection nulle - Dans le cas particulier où I_{ji}, A et B sont alignés, les vitesses $\vec{V}(A,j/i)$ et $\vec{V}(B,j/i)$ sont orthogonales à la droite qui passe par I_{ji}, A et B. Les projections $\vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB}$ sont nulles et l'équiprojectivité ne permet pas de déterminer de norme de la vitesse inconnue : Soit $\vec{V}(A,1/0)$ connue



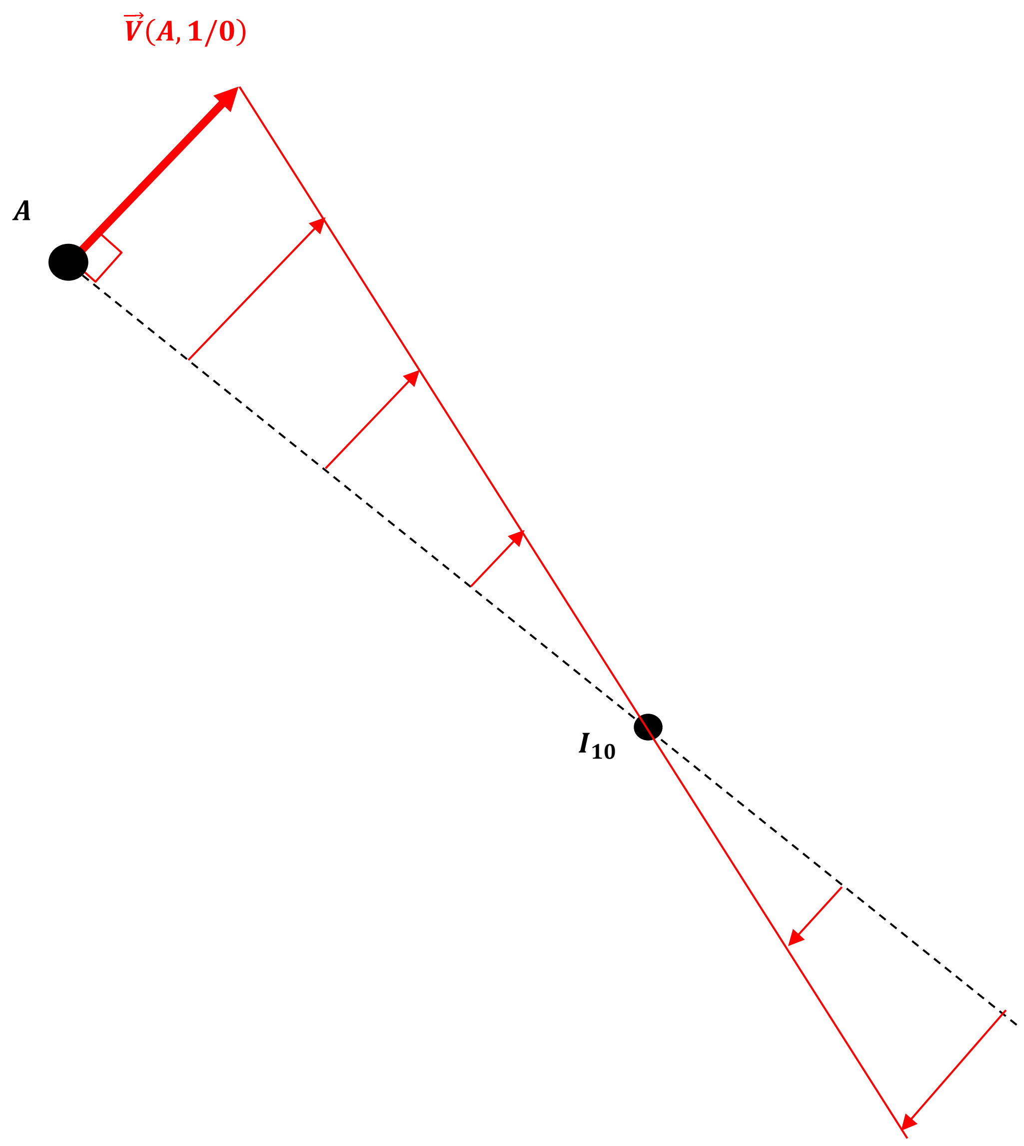
- Cas d'une projection d'une vitesse de direction presque orthogonale à la droite de projection (mécanisme dans une position particulière) – Lorsque I_{ji}, A et B sont presque alignés, l'imprécision sur nous instruments ε de 0,5 mm en moyenne (en supposant que l'angle droit soit mieux réalisé) se répercute très fortement (ΔV) sur la norme de la vitesse recherchée : Soit $\vec{V}(A,1/0)$ connue



• **Triangle des vitesses**

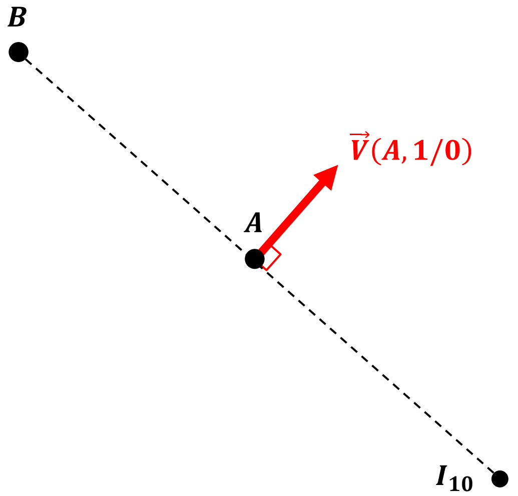
Cet outil permet de combler les manques liés aux problèmes abordés avec l'équiprojectivité. Il peut toutefois être utilisé à la place de l'équiprojectivité. Cependant, l'outil « triangle des vitesses » peut vite surcharger un schéma cinématique contrairement à l'équiprojectivité.

Il consiste à utiliser la propriété de proportionnalité de la norme d'une vitesse au rayon dans un mouvement de rotation.

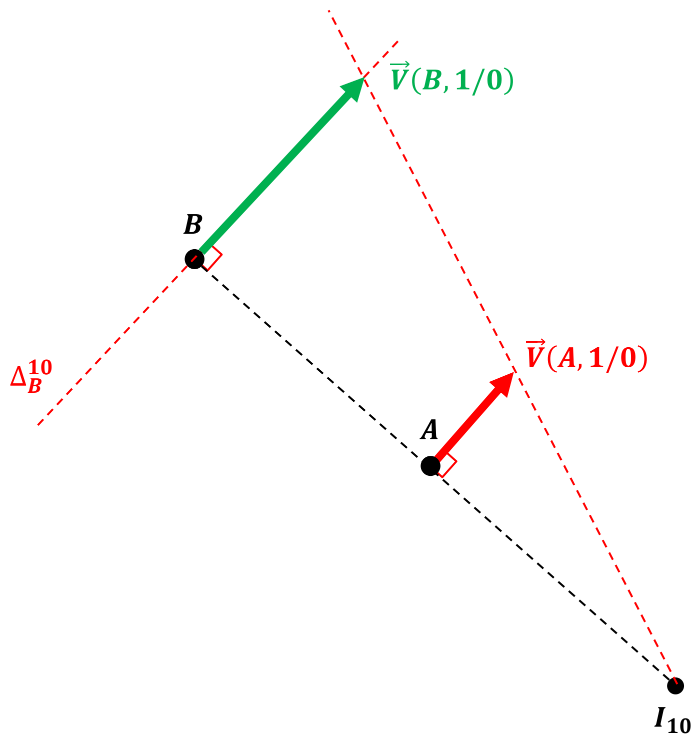


Exemples :

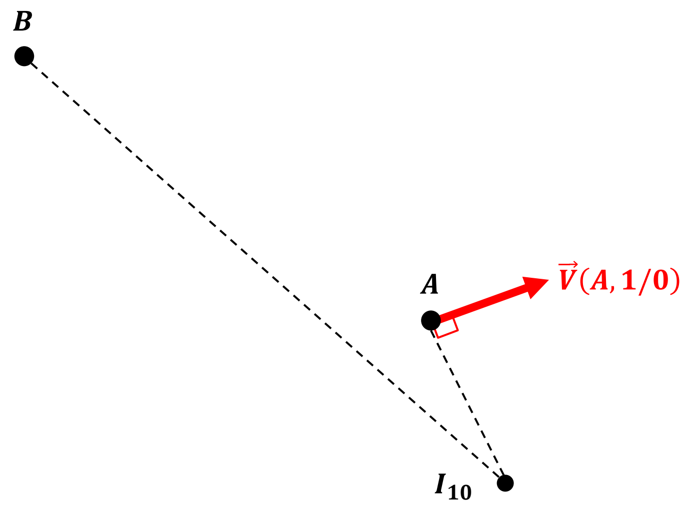
- A, B et I alignés



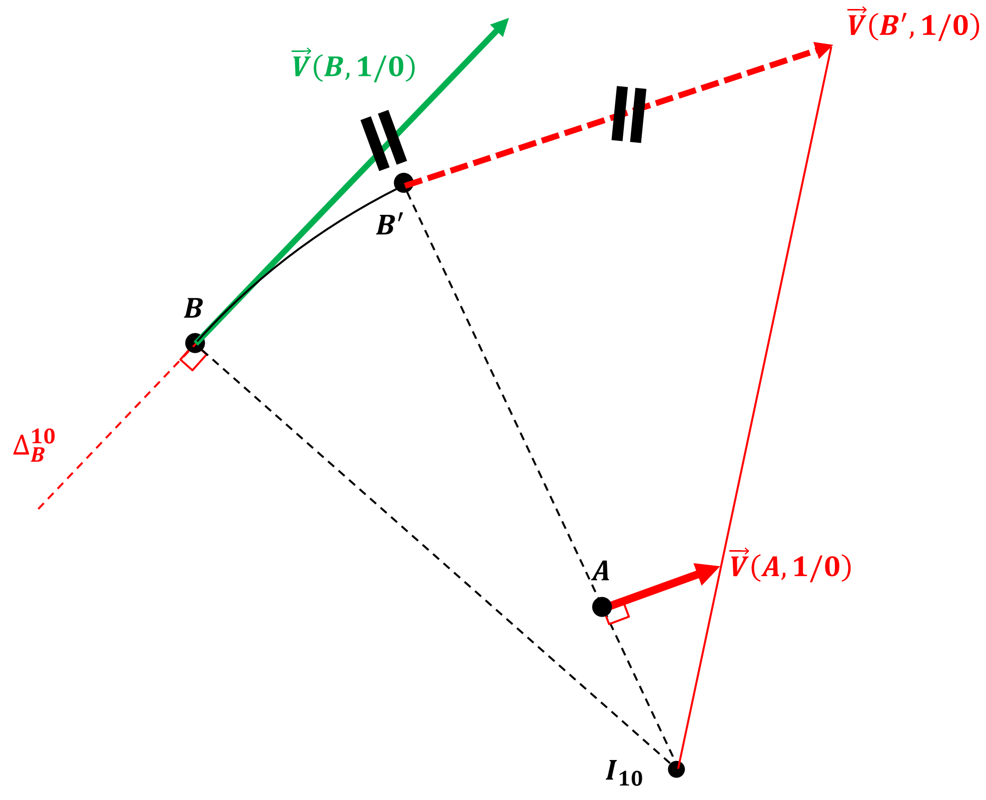
Après avoir déterminé Δ_B^{10}, il suffit de tracer la droite qui part de I_{10} et qui passe par l'extrémité de $\vec{V}(A,1/0)$ afin de déterminer la norme de $\vec{V}(B,1/0)$



- A, B et I non alignés



Le principe consiste à tracer le champ des vitesses 1/0 soit le long de la droite $(I_{10}A)$, soit le long de la droite $(I_{10}B)$. On choisira en fonction du schéma afin de ne pas surcharger une zone présentant déjà des constructions. Choisissons de tracer ce champ des vitesses le long de $(I_{10}A)$.



On prolonge la droite $(I_{10}A)$ de manière à ce que $I_{10}A > I_{10}B$. On reporte le point B en un point B' sur $(I_{10}A)$ avec un compas. On déterminer $\vec{V}(B',1/0)$ par la méthode des 3 points alignés. On trace Δ_B^{10} et on reporte la norme de $\vec{V}(B',1/0)$ en B car ayant le même rayon, $\|\vec{V}(B',1/0)\| = \|\vec{V}(B,1/0)\|$

A.V.5.b.iii Fermeture de chaîne cinématique

• **<u>Principe</u>**

Soit un mécanisme possédant une ou plusieurs chaînes fermées.

Le principe de l'utilisation de la fermeture de chaîne consiste à écrire une somme de vitesses égale au vecteur nul afin d'en déduire toutes les vitesses de la somme.

Mathématiquement, il est possible de déterminer tous les vecteurs d'une somme de vecteurs s'il n'y a que 3 vecteurs, si l'un deux possède une norme et direction connue (on notera V), et si la direction des deux autres est connue (on notera D).

Il faut donc pouvoir écrire :

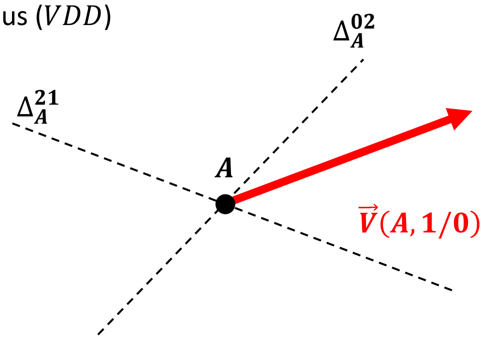
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Avec une vitesse connue V et les directions des deux autres connues DD. On notera donc par simplicité qu'il faut « VDD » pour que la fermeture de chaîne soit solvable.

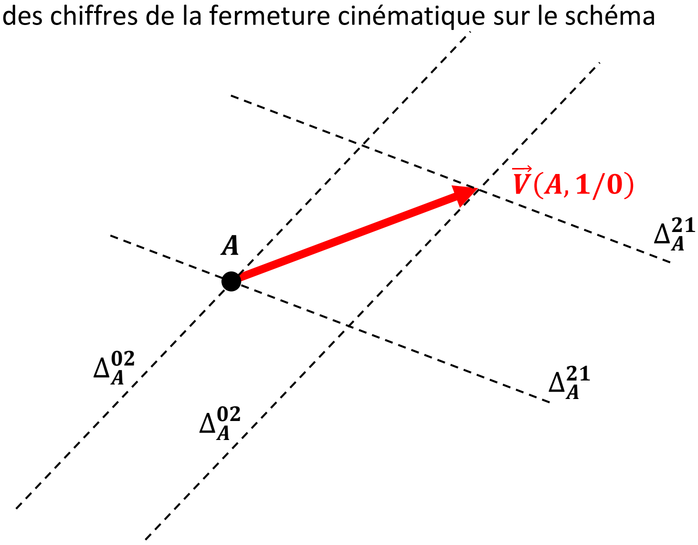
Remarque : évidemment, si l'on est en présence de deux vecteurs, ils seront opposés et de même norme.

• **Illustration**

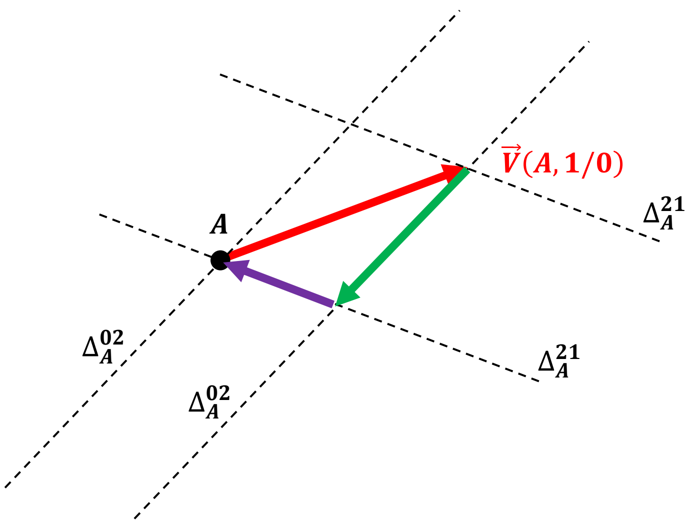
Soient une chaîne cinématique permettant d'écrire : $\vec{V}(A,1/0)+\vec{V}(A,0/2)+\vec{V}(A,2/1)=\vec{0}$ telle que $\vec{V}(A,1/0),\Delta_A^{02},\Delta_A^{21}$ connus (VDD)



On reporte les directions des vitesses connues de manière à former un parallélogramme (avec de l'expérience, une moitié de ce parallélogramme suffira). On précisera $\vec{V}(A,1/0)$, Δ_B^{02} et Δ_C^{21} en respectant l'ordre des chiffres de la fermeture cinématique sur le schéma



Comme la somme des 3 vecteurs doit être nulle, on tracer deux vecteurs suivant les bords du parallélogramme afin de mettre 3 flèches **bout à bout** :

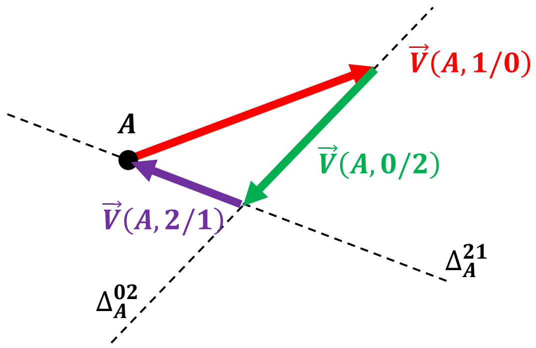


On identifie alors les vitesses trouvées. Attention, cette identification est source de beaucoup d'erreurs, il faut faire attention à ce qui est écrit dans la fermeture cinématique :

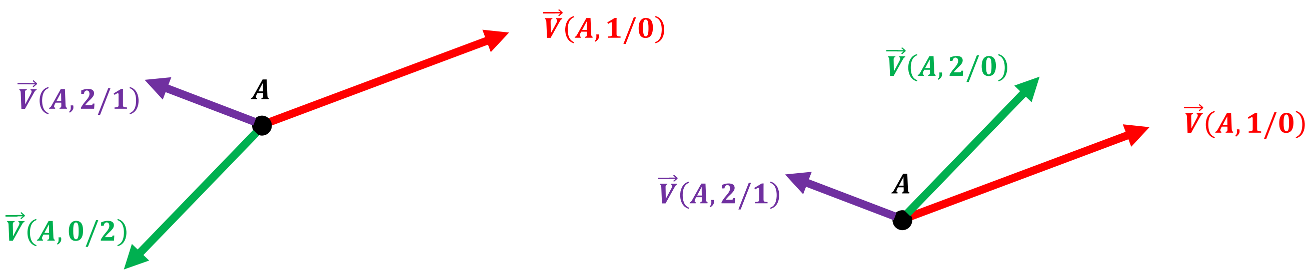
$$\vec{V}(A,1/0)+\vec{V}(A,0/2)+\vec{V}(A,2/1)=\vec{0}$$

Si l'on a bien respecté la prescription précédente : « On précisera $\vec{V}(A,1/0)$, Δ_B^{02} et Δ_C^{21} en respectant l'ordre des chiffres de la fermeture cinématique » sur le schéma, il suffira de lire les données inscrites. Sinon, bien regarder la fermeture afin d'identifier les indices de chaque vitesse.

On a donc :



On pourra finalement placer ces vitesses en A en changeant éventuellement sens de la flèche et chiffres associés si besoin. Cette étape est une seconde source d'erreur car certains oublient de replacer les vitesses en A avant de faire une équiprojectivité pour trouver la vitesse d'un mouvement en un autre point).

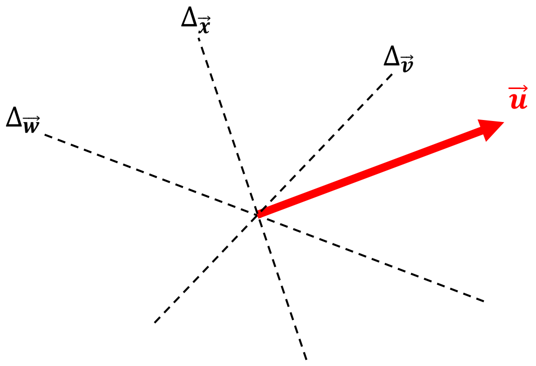


On pourra déplacer ces vitesses en d'autres points si besoin avec l'équiprojectivité ou le triangle des vitesses.

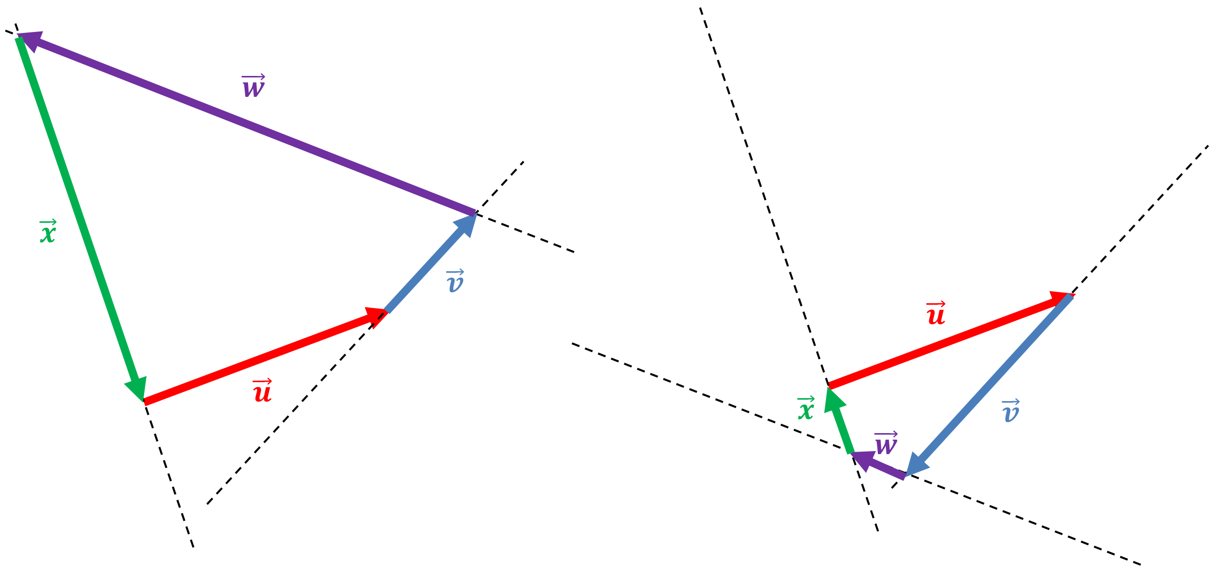
• **Cas de plus de 3 vecteurs**

Une somme de 4 vecteurs dont un seul est entièrement connu (norme et direction) et les 3 autres directions sont connues (VDDD) ne permet pas de déterminer la solution, il en existe en effet une infinité :

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{x}=\vec{0}$$



Voici deux exemples de solutions :



Il est donc nécessaire :

- Soit d'en connaître deux et de les sommer pour se ramener à une situation VDD
- Soit de réussir à en regrouper 2 dont la somme peut avoir une direction connue à l'aide de la détermination d'un CIR afin là aussi de se ramener à une situation VDD.

• **Méthode générale**

Pour toute chaîne cinématique à étudier, écrire la fermeture en vitesse associée :

$$\vec{V}(A,i/j)+\vec{V}(A,j/\dots)+\cdots+\vec{V}(A,\dots/i)=\vec{0}$$

Quelle que soit la situation, il faut se ramener à une situation VDD, c'est-à-dire une vitesse entièrement connue (norme et direction), et deux vitesses de directions connues.

L'idéal est de réaliser un tableau dont les entrées sont, en colonnes les points caractéristiques de la chaîne étudiée (points des éléments géométriques des liaisons), et en lignes les différents torseurs de la chaîne. La dernière ligne sera un bilan en chaque point de ce qui est connu.

	A	B	C	D	…
$\{\mathcal{V}_{ij}\}$					
$\{\mathcal{V}_{j/\dots}\}$					
…					
$\{\mathcal{V}_{\dots/i}\}$					
Bilan					

Ensuite, on inscrit dans chaque case ce que l'on sait de chaque vitesse : direction D, vitesse complète V ou vecteur nul $\vec{0}$:

	A	B	C	D	…
$\vec{V}(A,i/j)$	$\vec{0}$	D	D	D	…
$\boldsymbol{\vec{V}(A,j/\dots)}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\vec{0}}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	…
…	…	…	…	…	…
$\vec{V}(A,\dots/i)$	D	D	$\vec{0}$	D	…
Bilan					…

Le bilan sera de la forme VDD, VDDD, VDDDD… On ne fera pas apparaître les $\vec{0}$.

Première chose à regarder : Il existe des points où des vitesses sont nulles, et c'est normal. Toutefois, si on se place au point où la vitesse donnée est nulle, il n'y aura aucun V dans les bilans. On ne choisira donc évidemment pas ce point. De même, si on recherche une vitesse parmi toutes les vitesses de la fermeture, et si en un point cette vitesse est nulle, il est préférable de ne pas non plus choisir ce point afin d'éviter du travail par la suite pour la retrouvée en un autre point…

Après avoir fait attention aux vitesses nulles, et donc après avoir éliminé une ou deux colonnes, on trouvera alors deux solutions :

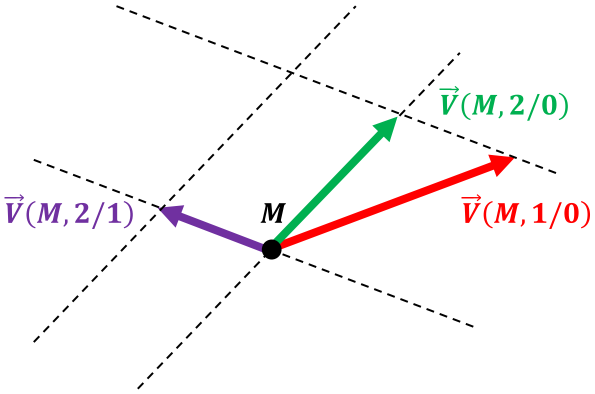
- Soit on trouve un bilan VDD, alors on peut procéder à la fermeture cinématique en ce point
- Si aucun bilan VDD n'est présent (VDDD, VDDDD etc), on ne peut pas conclure ! Il faut alors réussir à regrouper deux vitesses ou plus dans la fermeture cinématique tel que le CIR du mouvement regroupé puisse être trouvé, permettant de remplacer 2 vitesses ou plus de directions connues par une seule vitesse de direction connue. On refait alors le tableau pour trouver un point où VDD soit présent.

A.V.5.b.iv Composition du mouvement

• **Somme de deux vitesses connues**

Lorsque l'on connaît différentes vitesses en un point, la composition du mouvement permet de déterminer la vitesse somme des vitesses connues.

Exemple : Si l'on connaît $\vec{V}(M,2/1)$ et $\vec{V}(M,1/0)$, on a : $\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$

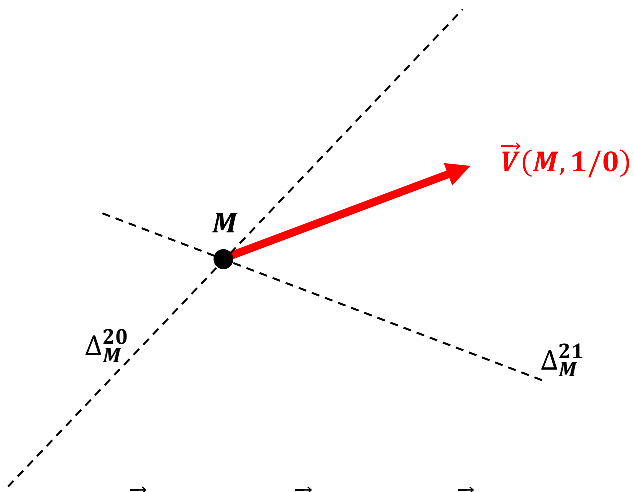


Attention, on ne met pas les flèches bout à bout comme nous l'avons vu pour les fermetures de chaîne.

• **Somme de deux vitesses équivalentes à une fermeture de chaîne**

Il arrive que l'on écrive une composition du mouvement pour résoudre une vitesse indéterminée. Elle consiste donc à se ramener à une situation VDD et une fermeture de chaîne se cache derrière !

Par exemple, connaissant $\vec{V}(M,1/0)$ et les directions Δ_M^{12} de $\vec{V}(M,1/2)$ et Δ_M^{20} de $\vec{V}(M,2/0)$

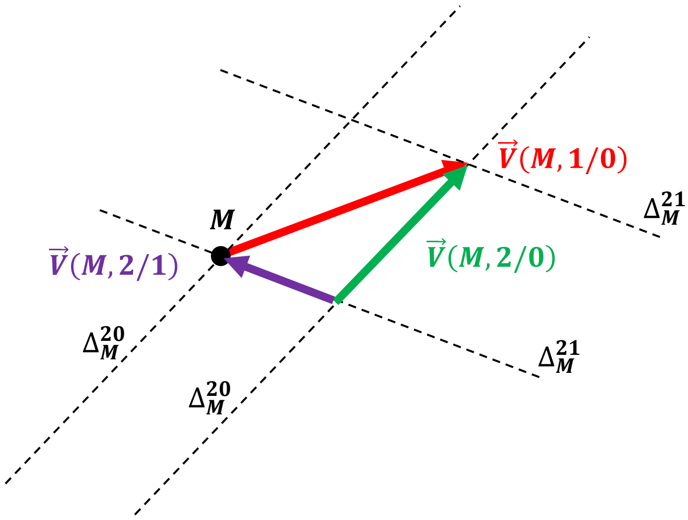


On a :

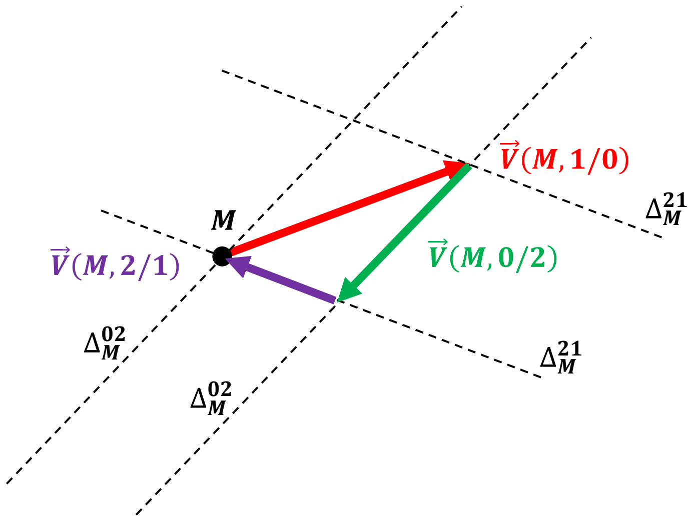
$$\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$$

Il est alors tentant de garder la somme, mais attention !!! C'est une source d'erreur car une somme ne consiste pas à mettre les flèches bout à bout. On peut repasser par une somme de 3 vitesses égale au vecteur nul. On pourra donc procéder des deux manières suivantes :

En gardant la somme : $\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$. Il faut alors faire attention, à ce que la vitesse $\vec{V}(M,2/0)$ soit une flèche dans un sens, et que les deux autres permettent de partir du début de cette flèche et d'arriver à sa fin tout en gardant le sens de la vitesse donnée $\vec{V}(M,1/0)$!



En se ramenant à une fermeture de chaîne : $\vec{V}(M,0/2) + \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0) = \vec{0}$



Remarque : les deux méthodes donnent évidemment le même résultat, mais attention si on garde une somme, car il faut réfléchir un peu plus et ne pas mettre les flèches bout à bout…

A.V.5.c Méthodologie de résolution graphique

Donnons dans ce paragraphes quelques éléments de méthodologie pour la résolution de problèmes en cinématique graphique.

A.V.5.c.i Réflexes à avoir

Lorsque l'on recherche une vitesse $\vec{V}(P,j/i)$

- Quelle est sa direction
  - Déterminer $I_{j/i}$
    - Trouver un point P_1 auquel la direction $\Delta_{P_1}^{ji}$ de $\vec{V}(P_1,j/i)$ peut être obtenue
    - Trouver un point P_2 auquel la direction $\Delta_{P_2}^{ji}$ de $\vec{V}(P_2,j/i)$ non parallèle à $\Delta_{P_1}^{ji}$ peut être obtenue
    - Déterminer $I_{j/i}$ à l'intersection des normales à $\vec{V}(P_1,j/i)$ en P_1 et $\vec{V}(P_1,j/i)$ en P_2
  - Tracer la droite $\left(I_{j/i}P\right)$
  - Tracer la direction Δ_P^{ji} de $\vec{V}(P,j/i)$ orthogonale à $\left(I_{j/i}P\right)$ en P
- Quelle est sa norme – Equiprojectivité (ou triangle des vitesses)
  - Trouver un point Q où la vitesse $\vec{V}(Q,j/i)$ est connue (direction et norme)
  - Tracer la droite (QP)
  - Déterminer la projection orthogonale $P_{QP}^{Q,ji}$ de $\vec{V}(Q,j/i)$ sur (QP)
  - Reporter cette projection $P_{QP}^{Q,ji} = P_{QP}^{P,ji}$ en P en respectant le sens de celle-ci selon le vecteur $\overrightarrow{QP}$
  - Introduire le point P' tel que $PP' = P_{QP}^{P,ji}$ soit la projection de $\vec{V}(P,j/i)$ sur $\overrightarrow{QP}$
  - Tracer la perpendiculaire à (PQ) passant par le point P'
  - Déterminer l'intersection entre (PQ) et Δ_P^{ji} et noter le point d'intersection P''
  - En déduire le vecteur recherché : $\vec{V}(P,j/i) = \overrightarrow{PP''}$

A.V.5.c.ii Mise en place d'une échelle de vitesse

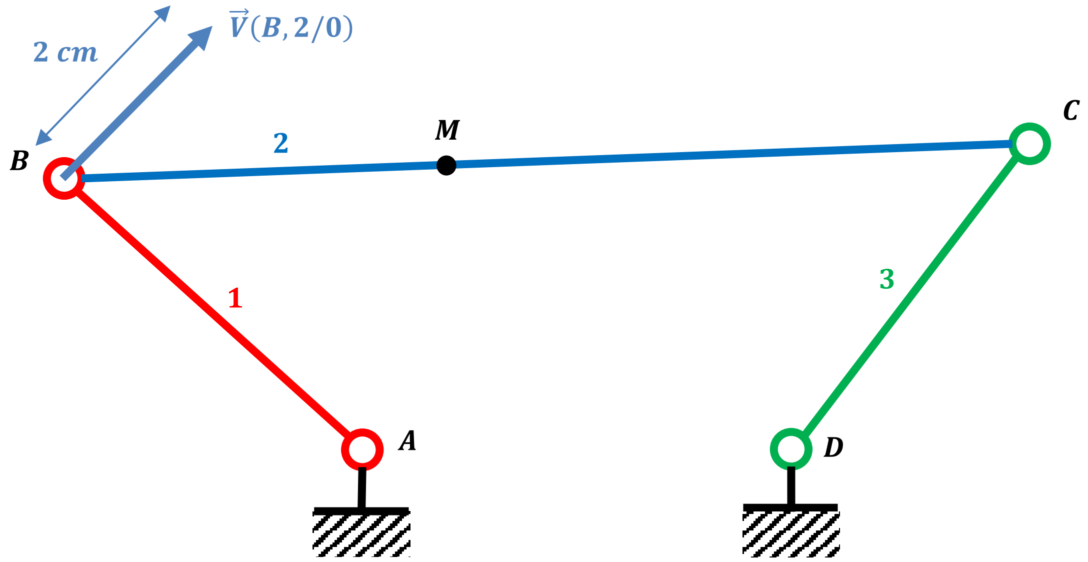
Attention, nous ne parlons pas ici d'échelle de représentation du mécanisme (dimensions des pièces), mais de l'échelle associant des valeurs de vitesses ($m.s^{-1}$) à des flèches de longueur donnée.

Attention, une échelle trop petite réduit la précision de la résolution, une échelle trop grande risque de « faire sortir » des flèches du dessin car trop grandes.

En entrée d'un mécanisme, on peut soit imposer une vitesse, soit imposer une vitesse de rotation.

- **Vitesse imposée**

Si une vitesse est imposée, par exemple $2\ m.s^{-1}$, et que l'on sait en quel point elle est valable (B dans l'exemple ci-dessous), il suffit de définir une échelle, par exemple $1\ cm \Leftrightarrow 1\ m.s^{-1}$. On pourra alors poser la vitesse d'entrée directement avec une longueur de $2\ cm$.



- **Vitesse de rotation imposée**

Il arrive que l'on donne une vitesse de rotation en entrée d'un mécanisme, par exemple $\Omega_{10} = 2\ rd.s^{-1}$ dans l'exemple précédent. Pour pouvoir traiter l'exercice, il faut connaître la longueur $L_1 = 1\ m$.

On calcule alors la vitesse de B : $\|\vec{V}(B,1/0)\| = |L_1\Omega_{10}| = 2\ m.s^{-1}$

Il suffit de poser une flèche en B en respectant le sens de rotation dépendant du signe de Ω_{10}et de définir une échelle, par exemple : $1\ cm \Leftrightarrow 1\ m.s^{-1}$. On traite alors le même cas que précédemment, avec une flèche en entrée de $2\ cm$ de longueur.

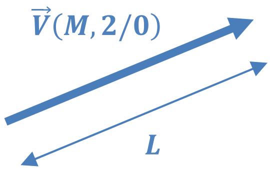
- **Bilan**

Finalement, il suffit de poser une flèche pour la vitesse d'entrée avec une longueur donnée puis :

- Si la vitesse est directement donnée, on a notre échelle
- Si la vitesse de rotation est donnée, il faut déterminer sa norme pour avoir l'échelle

A.V.5.c.iii Exploitation d'une échelle

Soit une flèche correspondant à une vitesse obtenue lors d'une résolution graphique :



Connaissant l'échelle, par exemple : $l\ cm \Leftrightarrow V\ m.s^{-1}$

Pour trouver la norme de la vitesse obtenue, il suffit de mesurer la longueur de la flèche L et de calculer :

$$\left\|\vec{V}(M,2/0)\right\| = \frac{L}{l}V$$

A.V.5.c.iv Méthodologie de résolution de problèmes à 1 chaîne cinématique

- Faire le dessin du mécanisme et établir son graph des liaisons
- Poser la vitesse d'entrée avec une longueur définie, par exemple 3 cm. On définit ici l'échelle des vitesses
- Déterminer le CIR du mouvement recherché (analyse de vitesses ou théorème des 3 plans glissants)
- Déterminer la direction de la vitesse recherchée à l'aide de la connaissance du CIR du mouvement correspondant
- Déterminer complètement une vitesse de la pièce dont le mouvement est recherché en fonction de l'entrée
- Déterminer la norme de la vitesse recherchée à l'aide de l'équiprojectivité (ou triangle des vitesses)
- A l'aide de l'échelle posée au départ, déterminer la valeur de la vitesse de sortie

Remarque : il est possible d'exploiter la fermeture de chaîne pour résoudre le problème

A.V.5.c.v Résolution de problèmes à plusieurs chaînes cinématiques

Dans le cas des problèmes à plusieurs chaînes cinématiques fermées, les problèmes sont plus ou moins complexes mais se résolvent parfaitement avec tous les outils donnés précédemment. C'est dans ce genre de problèmes qu'apparaissent les fermetures de chaînes faisant intervenir un trop grand nombre de directions (VDDD, VDDDD…) et qu'il faut réussir à trouver des CIR afin de n'avoir que des VDD. Nous traiterons un exemple en TD.